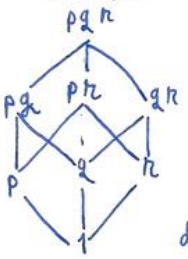
Relatii 1:

R-1

Fie p, q, r numere prime distincte și $n = p \cdot q \cdot r$.
Să se arate că laticele $(\mathcal{P}(\{p, q, r\}), \subset)$ și $(D_n, /)$ sunt izomorfe.

R_1 Fie p, q, r numere prime distincte și $n = p \cdot q \cdot r$

Să se arate că laticele $(\mathcal{P}(\{p, q, r\}), \subset)$ și $(D_n, /)$ sunt izomorfe.



Pentru a arăta că sunt izomorfe 1 este elementul minim pentru că acesta nu are divizori.

Pe nivelul 2 se află p, q, r deoarece acestea sunt nr. prime și distincte.

Pe nivelul 3 se află combinațiile diferite dintre p, q și r.

Iar pe ultimul nivel se află $p \cdot q \cdot r$ care este n având astfel diagrama pentru divizorii lui n.

Deoarece niciun element nu este lăsat liber și continuă pe o altă ramură funcția $(D_n, /)$ repre-

zintă un izomorfism

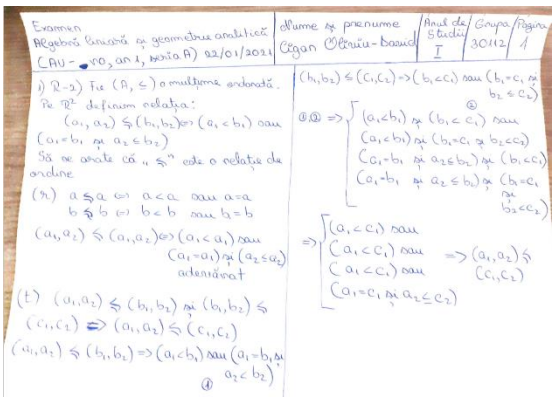
Relatii 2:

R-2

Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată. Pe A^2 definim relația:

$$(a_1, a_2) \preccurlyeq (b_1, b_2) \Leftrightarrow (a_1 < b_1) \text{ sau } (a_1 = b_1 \text{ și } a_2 \leq b_2).$$

Să se arate că "$\preccurlyeq$" este o relație de ordine.



Examen
Algebră liniară și geometrie analitică
(AU - vo., an 1, seria A) 22/01/2021

Numele și prenumele: Cegan Olteniu-Daniel | Anul de studii: I | Grupa: 30112 | Pagina: 1

i) R-2) Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată.
Pe A^2 definim relația:
$(a_1, a_2) \preccurlyeq (b_1, b_2) \Leftrightarrow (a_1 < b_1)$ sau $(a_1 = b_1$ și $a_2 \leq b_2)$
Să se arate că „$\preccurlyeq$" este o relație de ordine

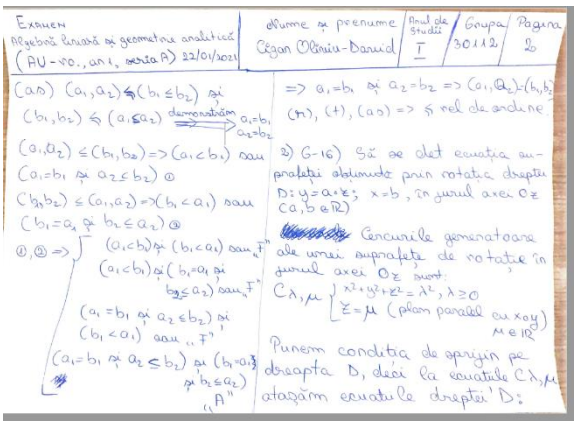
(r) $a \preccurlyeq a \Leftrightarrow a < a$ sau $a = a$
$b \preccurlyeq b \Leftrightarrow b < b$ sau $b = b$
$(a_1, a_2) \preccurlyeq (a_1, a_2) \Leftrightarrow (a_1 < a_1)$ sau $(a_1 = a_1)$ și $(a_2 \leq a_2)$ adevărat

(t) $(a_1, a_2) \preccurlyeq (b_1, b_2)$ și $(b_1, b_2) \preccurlyeq (c_1, c_2) \Rightarrow (a_1, a_2) \preccurlyeq (c_1, c_2)$
$(a_1, a_2) \preccurlyeq (b_1, b_2) \Rightarrow (a_1 < b_1)$ sau $(a_1 = b_1$ și $a_2 < b_2)$ ①

$(b_1, b_2) \preccurlyeq (c_1, c_2) \Rightarrow (b_1 < c_1)$ sau $(b_1 = c_1$ și $b_2 \leq c_2)$ ②

①② $\Rightarrow$ $(a_1 < b_1)$ și $(b_1 < c_1)$ sau
$(a_1 < b_1)$ și $(b_1 = c_1$ și $b_2 < c_2)$
$(a_1 = b_1$ și $a_2 \leq b_2)$ și $(b_1 < c_1)$
$(a_1 = b_1$ și $a_2 \leq b_2)$ și $(b_1 = c_1$ și $b_2 < c_2)$

$\Rightarrow$ $(a_1 < c_1)$ sau
$(a_1 < c_1)$ sau
$(a_1 < c_1)$ sau
$(a_1 = c_1$ și $a_2 \leq c_2)$
$\Rightarrow (a_1, a_2) \preccurlyeq (c_1, c_2)$



Examen
Algebră liniară și geometrie analitică
(AU - vo., an 1, seria A) 22/01/2021

Numele și prenumele: Cegan Olteniu-Daniel | Anul de studii: I | Grupa: 30112 | Pagina: 2

(a3) $(a_1, a_2) \preccurlyeq (b_1 \leq b_2)$ și
$(b_1, b_2) \preccurlyeq (a_1 \leq a_2)$ demonstrăm $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$
$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \Rightarrow (a_1 < b_1)$ sau
$(a_1 = b_1$ și $a_2 \leq b_2)$ ①
$(b_1, b_2) \leq (a_1, a_2) \Rightarrow (b_1 < a_1)$ sau
$(b_1 = a_1$ și $b_2 \leq a_2)$ ②

①,② $\Rightarrow$ $(a_1 < b_1)$ și $(b_1 < a_1)$ sau „F"
$(a_1 < b_1)$ și $(b_1 = a_1$ și $b_2 \leq a_2)$ sau „F"
$(a_1 = b_1$ și $a_2 \leq b_2)$ și $(b_1 < a_1)$ sau „F"
$(a_1 = b_1$ și $a_2 \leq b_2)$ și $(b_1 = a_1$ și $b_2 \leq a_2)$ „A"

$\Rightarrow a_1 = b_1$ și $a_2 = b_2 \Rightarrow (a_1, a_2) = (b_1, b_2)$
(r), (t), (a3) $\Rightarrow \preccurlyeq$ rel de ordine

2) G-16) Să se det ecuația suprafeței obținute prin rotația dreptei $D: y = a_1 z$; $x = b$, în jurul axei Oz $(a, b \in \mathbb{R})$

Cercurile generatoare ale unei suprafețe de rotație în jurul axei Oz sunt:
$C_{\lambda, \mu} \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2, \lambda \geq 0 \\ z = \mu \text{ (plan paralel cu } xoy) \end{cases}$
$\mu \in \mathbb{R}$

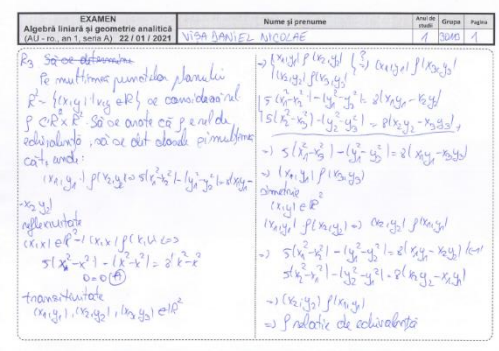
Punem condiția de apartenență pe dreapta D, deci la ecuațiile $C_{\lambda, \mu}$ atașăm ecuațiile dreptei D:

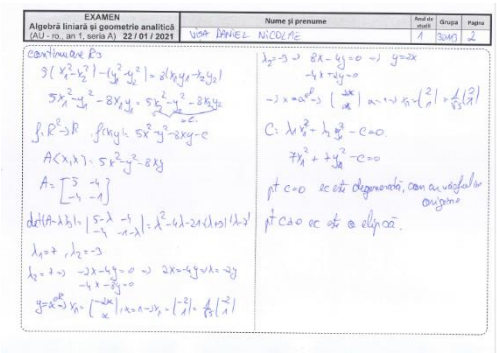
Relatii 3:

R-3

Pe mulțimea punctelor planului $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ se consideră relația $\rho \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Să se arate că ρ este o relație de echivalență, să se determine clasele și mulțimea cât, unde:

$$(x_1, y_1)\rho(x_2, y_2) \Leftrightarrow 5(x_1^2 - x_2^2) - (y_1^2 - y_2^2) = 8(x_1y_1 - x_2y_2).$$



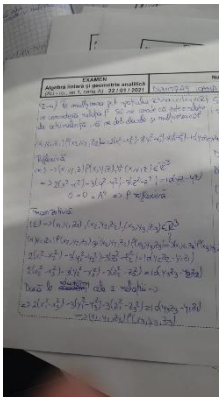


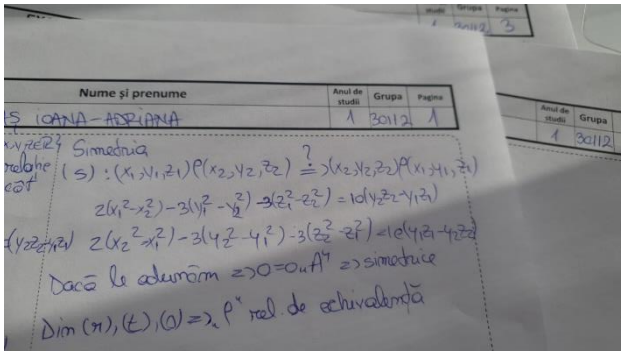
Relatii 4:

R-4

Pe mulțimea punctelor spațiului $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ se consideră relația ρ. Să se arate că este o relație de echivalență, să se determine clasele și mulțimea cât (interpretare geometrică):

$$(x_1, y_1, z_2)\rho(x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow 2(x_1^2 - x_2^2) - 3(y_1^2 - y_2^2) - 3(z_1^2 - z_2^2) = 10(y_2z_2 - y_1z_1).$$

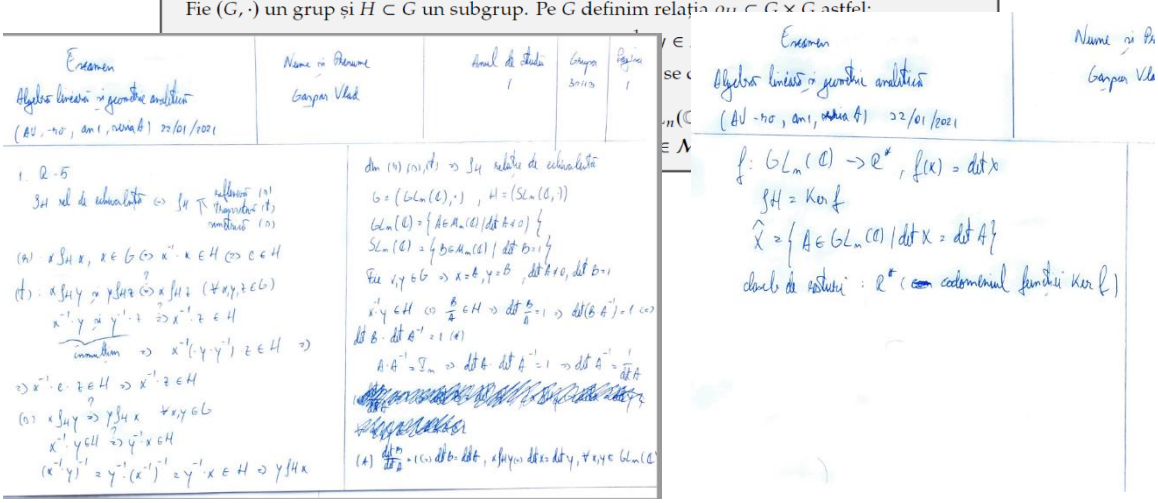




Relatii 5:

R-5

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $H \subset G$ un subgrup. Pe G definim relația $\rho \subset G \times G$ astfel:



Relatii 6:

R-6

Pe mulțimea punctelor planului $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ se consideră relația $\rho \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Să se arate că ρ este o relație de echivalență, să se determine clasele și mulțimea cât, unde:

$$(x_1, y_1)\rho(x_2, y_2) \Leftrightarrow 7(x_1^2 - x_2^2) + y_1^2 - y_2^2 = 8(x_1y_1 - x_2y_2).$$

EXAMEN

Algebră liniară și geometrie analitică

(CA, TI-RO, an 1, seria A) 18.01.2021

Nume și prenume	Anul de studiu	Grupa	Pag
FRANCIOLI DARIA	1	1	1.

R13/ $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ $\rho \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ρ - relație echivalentă

$(x_1,y_1)\rho(x_2,y_2) \Leftrightarrow 7(x_1^2 - x_2^2) + y_1^2 - y_2^2 = 8(x_1y_1 - x_2y_2)$

(r) $(x_1,y_1)\rho(x_1,y_1) \Leftrightarrow 7(\underbrace{x_1^2 - x_1^2}_{0}) + \underbrace{y_1^2 - y_1^2}_{0} = 8(\underbrace{x_1y_1 - x_1y_1}_{0})$ (A)

(t) $\left.\begin{array}{l}(x_1,y_1)\rho(x_2,y_2)\\(x_2,y_2)\rho(x_3,y_3)\end{array}\right\} \Rightarrow (x_1,y_1)\rho(x_3,y_3)$

I $(x_1,y_1)\rho(x_2,y_2) \Rightarrow 7(x_1^2 - x_2^2) + y_1^2 - y_2^2 = 8(x_1y_1 - x_2y_2)$

$(x_2,y_2)\rho(x_3,y_3) \Rightarrow 7(x_2^2 - x_3^2) + y_2^2 - y_3^2 = 8(x_2y_2 - x_3y_3)$ (+)

$\Leftrightarrow 7(x_1^2 - \cancel{x_2^2} + \cancel{x_2^2} - x_3^2) + y_1^2 - \cancel{y_2^2} + \cancel{y_2^2} - y_3^2 = 8(x_1y_1 - \cancel{x_2y_2} + \cancel{x_2y_2} - x_3y_3)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7(x_1^2 - x_3^2) + y_1^2 - y_3^2 = 8(x_1y_1 - x_3y_3)$ (A) $\Rightarrow (x_1,y_1)\rho(x_3,y_3)$.

(s) $(x_1,y_1)\rho(x_2,y_2) \Rightarrow (x_2,y_2)\rho(x_1,y_1)$

$(x_2,y_2)\rho(x_1,y_1) \Rightarrow 7(x_2^2 - x_1^2) + y_2^2 - y_1^2 = 8(x_2y_2 - x_1y_1) \mid \cdot(-1)$

$\Leftrightarrow (-1)\cdot[7(x_2^2 - x_1^2) + y_2^2 - y_1^2] = (-1)\cdot[8\cdot(x_2y_2 - x_1y_1)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7(x_1^2 - x_2^2) + y_1^2 - y_2^2 = 8(x_1y_1 - x_2y_2) \Rightarrow (x_1,y_1)\rho(x_2,y_2)$ (A)

Clasa de echiv. corresp. unui punct $M_0(x_0,y_0)$ este formată din totalitatea punctelor cercului cu centrul în origine și care trece prin M_0.

$7(x^2 - x_0^2) + y^2 - y_0^2 = 8(xy - x_0y_0)$

$= r^2$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2/\rho = \{M(x,y)\}$

Mulțo cât e formată din totalitatea cercurilor cu cercul în origine

ρ - relație de echiv. pe $\mathbb{R}^2$
Avem $a \in \mathbb{R}^2$ $\Big\} \Rightarrow \rho(a) = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, a)\, \rho\, (x_2, a)\}$

Relatii 7:

R-7

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $H \subset G$ un subgrup. Pe G definim relația $\rho_H \subset G \times G$ astfel:

$$x, y \in G,\ x \rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H.$$

Să se arate că ρ_H este o relație de echivalență pe G și să se determine clasele și mulțimea cât în cazul:

$$G = (\mathbb{R}^2, +), \quad H = (\mathbb{Z}^2, +).$$

(AU - FO, an 1, Seria A) 22.01.2021

R24.

Fie e - elementul neutru al subgrupului G

Atunci $e \in H$ și construim:

① $x^{-1} \cdot x = e \in H \Rightarrow x \rho_H x \Rightarrow \rho_H$ este reflexivă

② Dacă $x \rho_H y$ atunci $x^{-1} y \in H$ și deoarece H este un subgrup $\Rightarrow y^{-1} x = (x^{-1} y)^{-1} \in H \Rightarrow$
$\Rightarrow y \rho_H x \Rightarrow \rho_H$ este simetrică

③ Fie că $x \rho_H y$ și $y \rho_H z$. Atunci $x^{-1} y \in H$ și $y^{-1} z \in H$ și deoarece H e subgrup avem:
$x^{-1} z = (x^{-1} y)(y^{-1} z) \in H \Rightarrow x \rho_H z \Rightarrow \rho_H$ - reflexivă

Orice (x, y) din grupul $G = (\mathbb{R}^2, +)$ poate fi reprezentat ca $(x, y) = \{[x] + \{x\}, [y] + \{y\}\} = ([x], [y]) + (\{x\}, \{y\})$
unde $[\cdot]$ - partea întreagă și $\{\cdot\}$ - partea fracționară a numărului t. Deci $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 + (\{x\}, \{y\})$.

Astfel mulțimea cât este
$G/\rho = \{(\alpha, \beta) + \mathbb{Z}^2 \mid \alpha \in [0; 1),\ \beta \in [0; 1)\}$

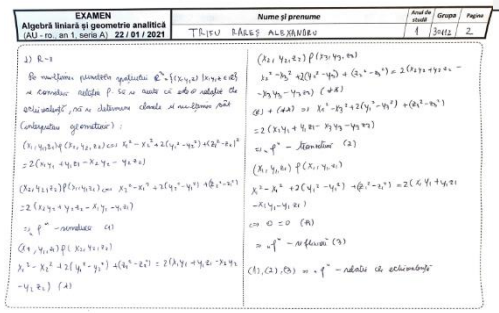
și clasele de echivalență au forma
$(\alpha, \beta) + \mathbb{Z}^2$ unde $\alpha \in [0; 1)$, $\beta \in [0; 1)$

Relatii 8:

R-8

Pe mulțimea punctelor spațiului $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ se consideră relația ρ. Să se arate că este o relație de echivalență, să se determine clasele și mulțimea cât (interpretare geometrică):

$$(x_1, y_1, z_1)\rho(x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 + 2(y_1^2 - y_2^2) + (z_1^2 - z_2^2) = 2(x_1y_1 + y_1z_1 - x_2y_2 - y_2z_2).$$



EXAMEN
Algebră liniară și geometrie analitică
(AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021

Nume și prenume: TRIFU RARES ALEXANDRU | Anul de studii: 1 | Grupa: 30412 | Pagina: 2

1) R-8

Pe mulțimea punctelor spațiului $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ se consideră relația ρ. Se ne arate că este o relație de echivalență, să se determine clasele și mulțimea cât (interpretare geometrică):

$(x_1,y_1,z_1)\rho(x_2,y_2,z_2) \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 + 2(y_1^2 - y_2^2) + (z_1^2 - z_2^2) = 2(x_1y_1 + y_1z_1 - x_2y_2 - y_2z_2)$

$(x_1,y_1,z_1)\rho(x_1,y_1,z_1) \Leftrightarrow x_1^2 - x_1^2 + 2(y_1^2 - y_1^2) + (z_1^2 - z_1^2) = 2(x_1y_1 + y_1z_1 - x_1y_1 - y_1z_1)$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ (A) $\Rightarrow \rho$ - reflexivă (1)

$(x_1,y_1,z_1)\rho(x_2,y_2,z_2)$

$x_1^2 - x_2^2 + 2(y_1^2 - y_2^2) + (z_1^2 - z_2^2) = 2(x_1y_1 + y_1z_1 - x_2y_2 - y_2z_2)$ (1)

$(x_2,y_2,z_2)\rho(x_1,y_1,z_1)$ $\Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 + 2(y_2^2 - y_1^2) + (z_2^2 - z_1^2) = 2(x_2y_2 + y_2z_2 - x_1y_1 - y_1z_1)$

$\Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 + 2(y_1^2 - y_2^2) + (z_1^2 - z_2^2) = 2(x_1y_1 + y_1z_1 - x_1y_1 - y_1z_1)$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ (A) $\Rightarrow \rho$ - reflexivă (2)

$(x_1,y_1,z_1)\rho(x_2,y_2,z_2)$

$x_2^2 - x_1^2 + 2(y_2^2 - y_1^2) + (z_2^2 - z_1^2) = 2(x_1y_1 + y_1z_1 - x_2y_2 - y_2z_2)$ (1)

$(1),(2),(3) \Rightarrow \rho$ - relație de echivalență

EXAMEN
Algebră liniară și geometrie analitică
(AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021

TRIFU RARES

$\rho < x_1, y_1, z_1 > = \{(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, y_1, z_1)\rho(x_2, y_2, z_2)\}$

este clasă de echivalență

$\mathbb{R}^3/\rho = \{\rho < x_1, y_1, z_1 > \mid (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3\}$

- mulțimea cât indusă pe ρ

Relatii 9:

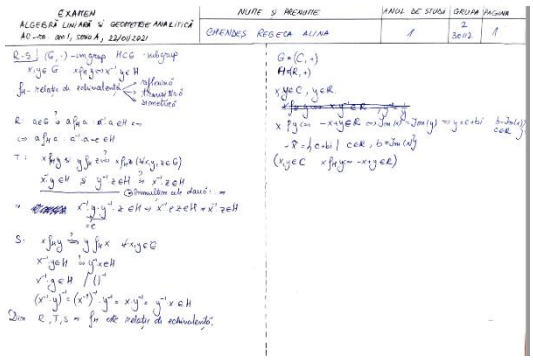
R-9

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $H \subset G$ un subgrup. Pe G definim relația $\rho_H \subset G \times G$ astfel:

$$x, y \in G,\ x\rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H.$$

Să se arate că ρ_H este o relație de echivalență pe G și să se determine clasele și mulțimea cât în cazul:

$$G = (\mathbb{C}, +), \quad H = (\mathbb{R}, +).$$



EXAMEN
ALGEBRĂ LINIARĂ ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ
AU - ro. an 1, seria A, 22/01/2021

NUME ȘI PRENUME: CHENDES REGECA ALINA | ANUL DE STUDIU: 1 | GRUPA: 30412 | PAGINA: 1

R-9 $(G,\cdot)$ - un grup $H \subset G$ - subgrup

$x, y \in G$ $x\rho_H y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$

ρ_H - relație de echivalență ← reflexivă, tranzitivă, simetrică

R: $a \in G$? $a\rho_H a$ $a^{-1}a \in H$?

$\Leftrightarrow a\rho_H a$ $e^{-1}a = e \in H$

T: $x\rho_H y$ și $y\rho_H z \overset{?}{\Rightarrow} x\rho_H z$ $(\forall x,y,z \in G)$

$x^{-1}y \in H$ și $y^{-1}z \in H \overset{?}{\Rightarrow} x^{-1}z \in H$

— Formulăm ale dacă: —

" $x^{-1}y \cdot y^{-1}z \in H \Leftrightarrow x^{-1}ez \in H \Leftrightarrow x^{-1}z \in H \Leftrightarrow x^{-1}z \in H$

S: $x\rho_H y \overset{?}{\Rightarrow} y\rho_H x$ $\forall x,y \in G$

$x^{-1}y \in H$? $\Rightarrow y^{-1}x \in H$

$x^{-1}y \in H$ / $()^{-1}$

$(x^{-1}y)^{-1} = (x^{-1})^{-1}y^{-1} = xy^{-1} \in H$

Din R, T, S $\Rightarrow \rho_H$ este relație de echivalență.

$G = (\mathbb{C}, +)$

$H = (\mathbb{R}, +)$

$x, y \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{R}$

~~$x\rho_H y \Leftrightarrow x^{-1}y \in \mathbb{R}$~~

$x\rho_H y \Leftrightarrow -x+y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(x^{-1}) = Im(y) \Leftrightarrow y = a+bi$ $b = Im(y)$ $a \in \mathbb{R}$

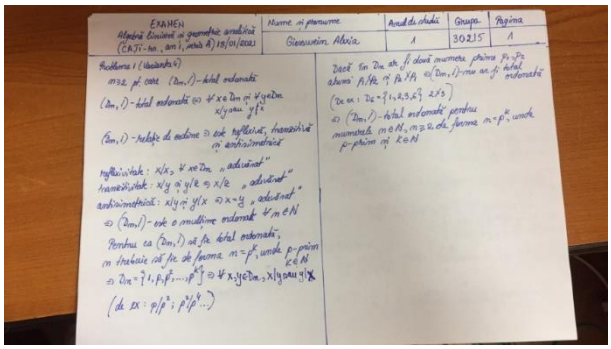
$-x = -a-bi$ | $a \in \mathbb{R}$, $b = Im(x)$

$(x, y \in \mathbb{C}$ $x\rho_H y \Leftrightarrow -x+y \in \mathbb{R})$

Relatii 10:

R-10

Să se determine numerele naturale $n \geq 2$ pentru care mulțimea $(D_n, /)$ este total ordonată. (D_n este mulțimea divizorilor naturali ai lui n).



EXAMEN
Algebră liniară și geometrie analitică
(CATI - ro., an 1, seria A) 18/01/2021

Nume și prenume: Gionucuin Alexia | Anul de studii: 1 | Grupa: 30215 | Pagina: 1

Problema 1 (Varianta 4)

$n \geq 2$ pt. care $(D_n, /)$ - total ordonată

$(D_n, /)$ - total ordonată $\Leftrightarrow \forall x \in D_n$ și $\forall y \in D_n$ x/y sau y/x

$(D_n, /)$ - relație de ordine $\Leftrightarrow$ este reflexivă, tranzitivă și antisimetrică

reflexivitate: x/x, $\forall x \in D_n$ „adevărat"

tranzitivitate: x/y și $y/z \Rightarrow x/z$ „adevărat"

antisimetrică: x/y și $y/x \Rightarrow x = y$ „adevărat"

$\Rightarrow (D_n, /)$ - este o mulțime ordonată $\forall n \in \mathbb{N}$

Pentru ca $(D_n, /)$ să fie total ordonată, în trebuie că fie de forma $n = p^k$, unde p-prim și $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow D_n = \{1, p, p^2, \ldots, p^k\} \Rightarrow \forall x, y \in D_n, x/y$ sau y/x

(de ex: p/p^2; p^2/p^4 ...)

Dacă în D_n ar fi două numere prime p_1 și p_2 atunci p_1/p_2 și p_2/p_1 și $(D_n, /)$ nu ar fi total ordonată

(De ex: $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ $2 \nmid 3$)

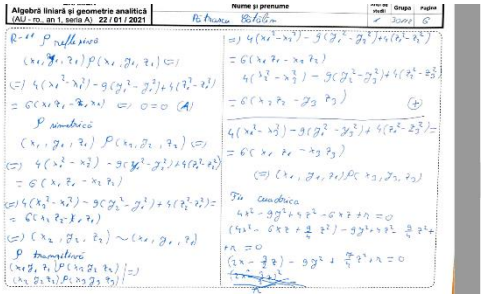
$\Rightarrow (D_n, /)$ - total ordonată pentru numerele $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ de forma $n = p^k$, unde p-prim și $k \in \mathbb{N}$

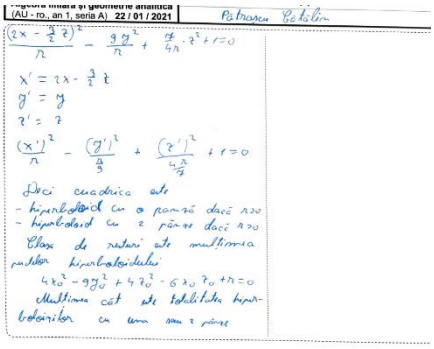
Relatii 11:

R-11

Pe mulțimea punctelor spațiului $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ se consideră relația ρ. Să se arate că este o relație de echivalență, să se determine clasele și mulțimea cât (interpretare geometrică):

$$(x_1, y_1, z_2)\rho(x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow 4(x_1^2 - x_2^2) - 9(y_1^2 - y_2^2) + 4(z_1^2 - z_2^2) = 6(x_1z_1 - x_2z_2).$$



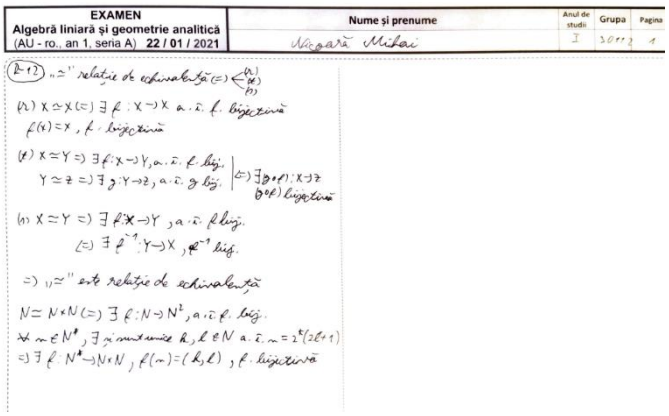


Relatii 12:

R-12

Fie M o mulțime și $\mathcal{P}(M)$ mulțimea părților sale. Pe $\mathcal{P}(M)$ definim relația $X \simeq Y \Leftrightarrow$ există funcție bijectivă $f : X \to Y$. Să se arate că "$\simeq$" este o relație de echivalență și că:

$$\mathbb{N} \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

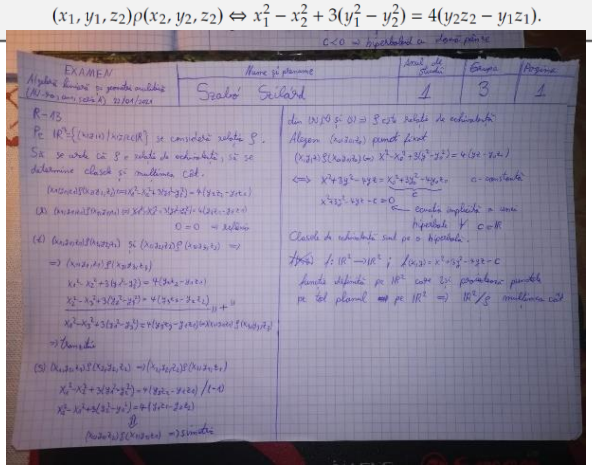


Relatii 13:

R-13

Pe mulțimea punctelor spațiului $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ se consideră relația ρ. Să se arate că este o relație de echivalență, să se determine clasele și mulțimea cât (interpretare geometrică):

$$(x_1, y_1, z_2)\rho(x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 + 3(y_1^2 - y_2^2) = 4(y_2z_2 - y_1z_1).$$



Relatii 14:

R-14

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $H \subset G$ un subgrup. Pe G definim relația $\rho_H \subset G \times G$ astfel:

$$x, y \in G,\ x \rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H.$$

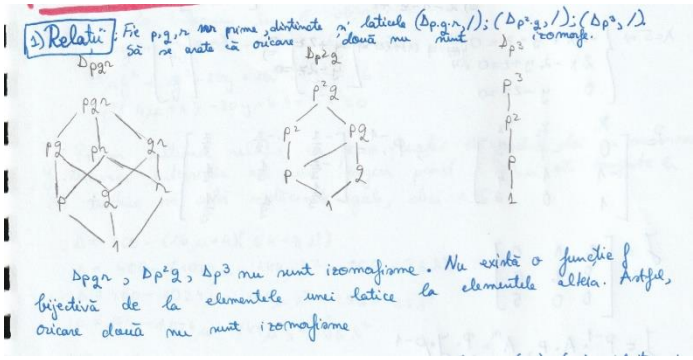
Să se arate că ρ_H este o relație de echivalență pe G și să se determine clasele și mulțimea cât în cazul:

$$G = (\mathbb{C}^*, \cdot), \quad H = U = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}.$$

Relatii 15:

R-15

Fie p, q, r numere prime distincte și laticele $(D_{p \cdot q \cdot r}, /)$, $(D_{p^3 \cdot q}, /)$, $(D_{p^7}, /)$.
Să se arate că oricare două nu sunt izomorfe.

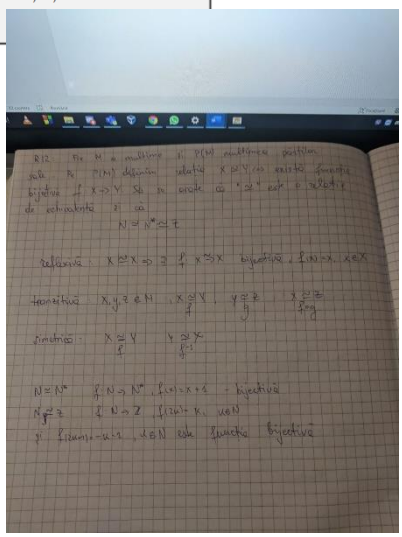


Relatii 16:

R-16

Fie M o mulțime și $\mathcal{P}(M)$ mulțimea părților sale. Pe $\mathcal{P}(M)$ definim relația $X \simeq Y \Leftrightarrow$ există funcție bijectivă $f : X \to Y$. Să se arate că "$\simeq$" este o relație de echivalență și că:

$$\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}^* \simeq \mathbb{Z}.$$



Relatii 17:

R-17

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $H \subset G$ un subgrup. Pe G definim relația $\rho_H \subset G \times G$ astfel:

$$x, y \in G,\ x \rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H.$$

Să se arate că ρ_H este o relație de echivalență pe G și să se determine clasele și mulțimea cât în cazul:

$$G = (\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +), \quad H = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}.$$

R-17

$G = (\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$; $H = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x), \forall x\}$

Fie $f, g \in G \to f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f \rho_H g \Leftrightarrow f^{-1} \cdot g \in H$

$\Leftrightarrow (f^{-1} \cdot g)(-x) = (f^{-1} \cdot g)(x)$

$f^{-1}(x) = -f(x)$

$\cancel{f^{-1}(g(-x)) = f^{-1}(g(x))}$

$\cancel{\Leftrightarrow -f(g(-x)) = -f(g(x))}$

$\cancel{\Leftrightarrow (f \circ g)}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(-x) \cdot g(-x) = f^{-1}(x) \cdot g(x)$

$\Leftrightarrow -f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x)$

$\Leftrightarrow f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x)$

$\Leftrightarrow (f \cdot g)(-x) = (f \cdot g)(x)$

$\Rightarrow f \cdot g$ – ~~pară~~ funcție pară

$\Rightarrow f, g$ – au aceeași paritate

Fie $F : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \{0, 1\}$, $F(x)$ = paritatea fct. x

$\boxed{R-23}$ rezolvat pe tablă

$\boxed{R-25}$ ✓

$$x \rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H$$

$$G = (\mathbb{R}^*, \cdot), \; H = ((0,\infty), \cdot)$$

Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$

$$x \rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} y \in (0, +\infty) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \cdot y \in (0, +\infty) \Rightarrow \frac{y}{x} > 0$$

Fie $f : \mathbb{R}^* \to \{-1, 1\}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_H = \ker f$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \{ y \in \mathbb{R}^* \mid \frac{y}{x} > 0 \}$$

clasele de resturi: $\{-1, 1\}$

$\Rightarrow \rho_H = \ker f$

$f(x) = \begin{cases} 0 & x - \text{par} \\ 1 & x - \text{impară} \end{cases}$

$\hat{f} = \{ g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid g \text{ are aceeași paritate cu } f \}$

clasele de resturi: $\{0, 1\}$

$\boxed{R-17}$

$x \rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H$

$G = (\mathbb{C}, +)$, $H = (\mathbb{R}, +)$

$x y \in \mathbb{C}$

$x \rho_H y \Leftrightarrow (-x) + y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f(z) = \operatorname{Im}(z)$

$\Rightarrow \rho_H = \ker f$

$\hat{x} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(x) \}$

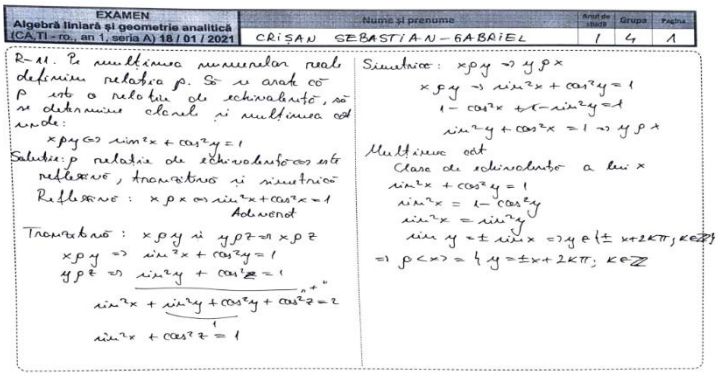
clasele de resturi: $\mathbb{R}^2$

Relatii 18 :

R-18

Pe mulțimea numerelor reale definim relația ρ. Să se arate că ρ este o relație de echivalență, să se determine clasele și mulțimea cât, unde:

$$x \rho y \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 y = 1.$$



EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA, TI – ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studiu	Grupa	Pagina
	CRIȘAN SEBASTIAN-GABRIEL	1	4	1

R-11. Pe mulțimea numerelor reale definim relația ρ. Să se arate că ρ este o relație de echivalență, și se determine clasa și mulțimea cât unde:

$x \rho y \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 y = 1$

Soluție: ρ relația de echivalență $\Leftrightarrow$ este reflexivă, tranzitivă și simetrică

Reflexivă: $x \rho x \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ Adevărat

Tranzitivă: $x \rho y$ și $y \rho z \Rightarrow x \rho z$

$x \rho y \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 y = 1$

$y \rho z \Rightarrow \sin^2 y + \cos^2 z = 1$ $\quad$ "+"

$\sin^2 x + \underbrace{\sin^2 y + \cos^2 y}_{1} + \cos^2 z = 2$

$\sin^2 x + \cos^2 z = 1$

Simetrică: $x \rho y \Rightarrow y \rho x$

$x \rho y \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 y = 1$

$1 - \cos^2 x + 1 - \sin^2 y = 1$

$\sin^2 y + \cos^2 x = 1 \Rightarrow y \rho x$

Mulțimea cât

Clase de echivalență a lui x

$\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 y$

$\sin^2 x = \sin^2 y$

$\sin y = \pm \sin x \Rightarrow y \in \{\pm x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow \rho\langle x \rangle = \{y = \pm x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Relatii 19:

R-19

Pe mulțimea punctelor planului $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ se consideră relația $\rho \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Să se arate că ρ este o relație de echivalență, să se determine clasele și mulțimea cât, unde:

$$(x_1, y_1)\rho(x_2, y_2) \Leftrightarrow 9(x_1^2 - x_2^2) + y_1^2 - y_2^2 = 6(x_1 y_1 - x_2 y_2) + 20(x_2 - x_1).$$

Relatii 20:

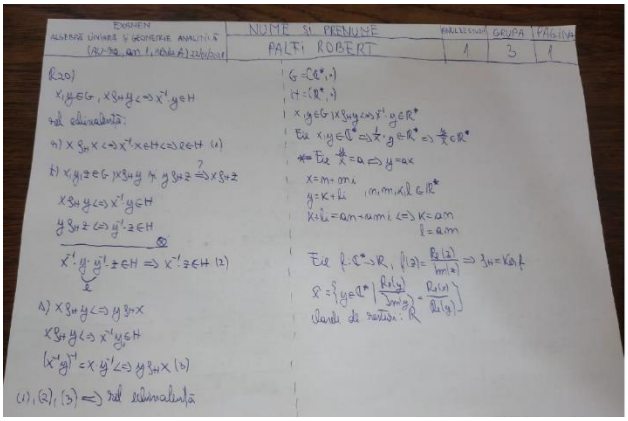
R-20

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $H \subset G$ un subgrup. Pe G definim relația $\rho_H \subset G \times G$ astfel:

$$x, y \in G,\ x \rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H.$$

Să se arate că ρ_H este o relație de echivalență pe G și să se determine clasele și mulțimea cât în cazul:

$$G = (\mathbb{C}^*, \cdot), \quad H = (\mathbb{R}^*, \cdot).$$



EXAMEN ALGEBRĂ LINIARĂ ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ (AL-TI, an 1, seria A) 22/01/2021	NUME ȘI PRENUME	PARCURSUL	GRUPA	PAGINA
	PALTI ROBERT	1	3	1

R20)

$x, y \in G$, $x \rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H$

rel echivalență:

a) $x \rho_H x \Leftrightarrow x^{-1} x \in H \Leftrightarrow 2 \in H$ (1)

b) $x, y, z \in G$, $x \rho_H y$ și $y \rho_H z \overset{?}{\Rightarrow} x \rho_H z$

$x \rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H$

$y \rho_H z \Leftrightarrow y^{-1} z \in H$

$\otimes$

$x^{-1} \cdot \underbrace{y \cdot y^{-1}}_{1} z \in H \Rightarrow x^{-1} z \in H$ (2)

A) $x \rho_H y \Leftrightarrow y \rho_H x$

$x \rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H$

$(x^{-1} y)^{-1} = x \cdot y^{-1} \Leftrightarrow y \rho_H x$ (3)

(1), (2), (3) $\Leftrightarrow$ rel echivalență

$G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$

$H = (\mathbb{R}^*, \cdot)$

$x, y \in G$ $x \rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in \mathbb{R}^*$

Fie $x, y \in \mathbb{C}^* \Rightarrow x^{-1} \cdot y \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{y}{x} \in \mathbb{R}^*$

$\Leftarrow$ Fie $\frac{y}{x} = a \Leftrightarrow y = ax$

$x = m + ni$

$y = k + li$ $\quad m, n, k, l \in \mathbb{R}^*$

$k + li = am - ani \Leftrightarrow k = am$

$l = an$

Fie $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$, $f(z) = \frac{Re(z)}{Im(z)} \Rightarrow z_H = \ker f$

$\mathbb{R} = \left\{ y \in \mathbb{C}^* \,\middle|\, \frac{Re(y)}{Im(y)} = \frac{Re(x)}{Re(y)} \right\}$

Clasele de rezultă: $\mathbb{R}$

Relatii 21:

R-21

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $H \subset G$ un subgrup. Pe G definim relația $\rho_H \subset G \times G$ astfel:

$$x, y \in G,\ x\rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H.$$

Să se arate că ρ_H este o relație de echivalență pe G și să se determine clasele și mulțimea cât în cazul:

$$G = (U, \cdot), \quad H = (U_n, \cdot)$$

unde $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
OTĂ-NICOLAE	1	30113	2

R-21 Fie $(G, \cdot)$ un grup și $H \subset G$ un subgrup.
Pe G definim relația $\rho_H \subset G \times G$ astfel:
$x, y \in G$, $x \rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H$.
Să se arate că ρ_H este o relație de echivalență pe G și să se determine clasele și mulțimea cât în cazul: $G = (U, \cdot)$, $H = (U_n, \cdot)$
unde $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Fie $x, y \in U \Rightarrow |x| = 1$; $|y| = 1$

$x^{-1} y \in H \Leftrightarrow \frac{1}{x} \cdot y \in U_n$

$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{y^n}{x^n} = 1 \Leftrightarrow y^n = x^n$

$f: U \to$, $f(x) = x^n$

$\to \rho_H = \operatorname{Ker} f$ $\quad \hat{x} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, z^n = 1\}$

Relatii 22:

R-22

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ definim pe $\mathbb{Z}$ relația ρ_n: $x\rho_n y \Leftrightarrow n \mid (x - y)$. Să se arate că ρ_n este o relație de echivalență și să se arate că:

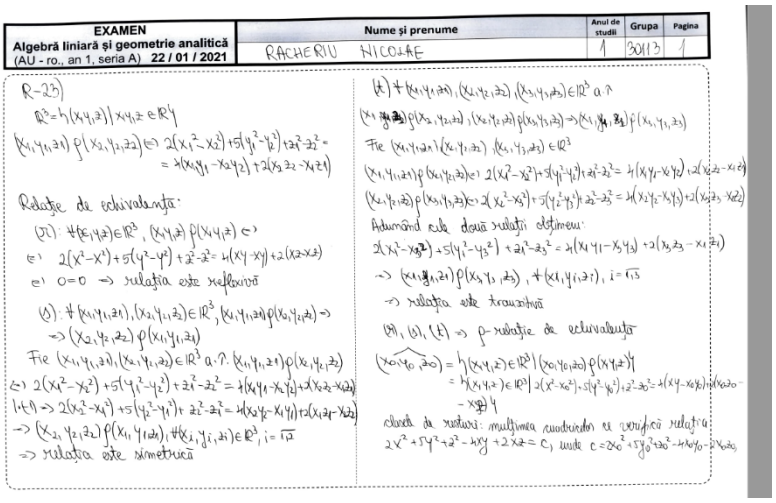
$$\rho_m \cap \rho_n = \rho_{[m,n]} \quad \text{și} \quad \rho_m \circ \rho_n = \rho_{(m,n)}.$$

Relatii 23:

R-23

Pe mulțimea punctelor spațiului $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ se consideră relația ρ. Să se arate că este o relație de echivalență, să se determine clasele și mulțimea cât (interpretare geometrică):

$$(x_1, y_1, z_2)\rho(x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow 2(x_1^2 - x_2^2) + 5(y_1^2 - y_2^2) + z_1^2 - z_2^2 = 4(x_1y_1 - x_2y_2) + 2(x_2z_2 - x_1z_1).$$



EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	RACHERIU NICOLAE	1	30113	1

R-23)

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$(x_1,y_1,z_1)\,\rho\,(x_2,y_2,z_2) \Leftrightarrow 2(x_1^2-x_2^2)+5(y_1^2-y_2^2)+z_1^2-z_2^2 = 4(x_1y_1-x_2y_2)+2(x_1z_1-x_2z_2)$

Relație de echivalență:

(r): $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x,y,z)\,\rho\,(x,y,z) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x^2-x^2)+5(y^2-y^2)+z^2-z^2 = 4(xy-xy)+2(xz-xz)$

$\Leftrightarrow 0=0 \Rightarrow$ relația este reflexivă

(s): $\forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$, $(x_1,y_1,z_1)\,\rho\,(x_2,y_2,z_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_2,y_2,z_2)\,\rho\,(x_1,y_1,z_1)$

Fie $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$ a.î. $(x_1,y_1,z_1)\,\rho\,(x_2,y_2,z_2)$

$\Leftrightarrow 2(x_1^2-x_2^2)+5(y_1^2-y_2^2)+z_1^2-z_2^2 = 4(x_1y_1-x_2y_2)+2(x_1z_1-x_2z_2)$

$|\cdot(-1) \Rightarrow 2(x_2^2-x_1^2)+5(y_2^2-y_1^2)+z_2^2-z_1^2 = 4(x_2y_2-x_1y_1)+2(x_2z_2-x_1z_1)$

$\Rightarrow (x_2,y_2,z_2)\,\rho\,(x_1,y_1,z_1)$, $\forall (x_i,y_i,z_i)\in\mathbb{R}^3$, $i=\overline{1,2}$

$\Rightarrow$ relația este simetrică

(t) $\forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\in\mathbb{R}^3$ a.î.

$(x_1,y_1,z_1)\,\rho\,(x_2,y_2,z_2),\ (x_2,y_2,z_2)\,\rho\,(x_3,y_3,z_3) \Rightarrow (x_1,y_1,z_1)\,\rho\,(x_3,y_3,z_3)$

Fie $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\in\mathbb{R}^3$

$(x_1,y_1,z_1)\,\rho\,(x_2,y_2,z_2) \Leftrightarrow 2(x_1^2-x_2^2)+5(y_1^2-y_2^2)+z_1^2-z_2^2 = 4(x_1y_1-x_2y_2)+2(x_1z_1-x_2z_2)$

$(x_2,y_2,z_2)\,\rho\,(x_3,y_3,z_3) \Leftrightarrow 2(x_2^2-x_3^2)+5(y_2^2-y_3^2)+z_2^2-z_3^2 = 4(x_2y_2-x_3y_3)+2(x_2z_2-x_3z_3)$

Adunând cele două relații obținem:

$2(x_1^2-x_3^2)+5(y_1^2-y_3^2)+z_1^2-z_3^2 = 4(x_1y_1-x_3y_3)+2(x_1z_1-x_3z_3)$

$\Rightarrow (x_1,y_1,z_1)\,\rho\,(x_3,y_3,z_3)$, $\forall (x_i,y_i,z_i)$, $i=\overline{1,3}$

$\Rightarrow$ relația este tranzitivă

(r), (s), (t) $\Rightarrow \rho$ - relație de echivalență

$\widehat{(x_0,y_0,z_0)} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x_0,y_0,z_0)\,\rho\,(x,y,z)\}$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2(x^2-x_0^2)+5(y^2-y_0^2)+z^2-z_0^2 = 4(xy-x_0y_0)+2(xz_0-x_0z)\}$

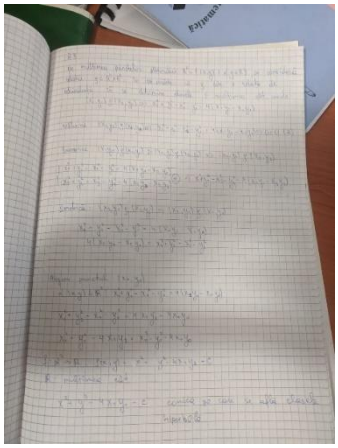
Schița de rezolvare: mulțimea cuadricelor ce verifică relația: $2x^2+5y^2+z^2-4xy+2xz=c$, unde $c=2x_0^2+5y_0^2+z_0^2-4x_0y_0-2x_0z_0$

Relatii 24:

R-24

Pe mulțimea punctelor planului $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ se consideră relația $\rho \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Să se arate că ρ este o relație de echivalență, să se determine clasele și mulțimea cât, unde:

$$(x_1,y_1)\rho(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2 = 4(x_1y_1-x_2y_2).$$

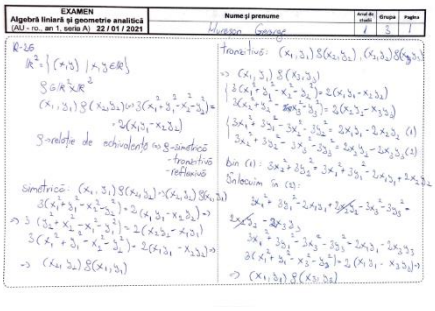


Relatii 25:

R-25

Pe mulțimea punctelor planului $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ se consideră relația $\rho \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Să se arate că ρ este o relație de echivalență, să se determine clasele și mulțimea cât, unde:

$$(x_1,y_1)\rho(x_2,y_2) \Leftrightarrow 3(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2) = 2(x_1y_1-x_2y_2).$$



EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Huzaco George	1	3	1

R-25

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

$\rho \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2) \Leftrightarrow 3(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2) = 2(x_1y_1-x_2y_2)$

ρ - relație de echivalență $\Leftrightarrow$ ρ - simetrică
- tranzitivă
- reflexivă

simetrică: $(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2) \Rightarrow (x_2,y_2)\,\rho\,(x_1,y_1)$

$3(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2) = 2(x_1y_1-x_2y_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x_2^2+x_2^2-x_1^2-y_1^2) = 2(x_2y_2-x_1y_1)$

$3(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2) = 2(x_1y_1-x_2y_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_2,y_2)\,\rho\,(x_1,y_1)$

Tranzitivă: $(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2),\ (x_2,y_2)\,\rho\,(x_3,y_3)$

$\Rightarrow (x_1,y_1)\,\rho\,(x_3,y_3)$

$3(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2) = 2(x_1y_1-x_2y_2)$

$3(x_2^2+y_2^2-x_3^2-y_3^2) = 2(x_2y_2-x_3y_3)$

$3x_1^2+3y_1^2-3x_2^2-3y_2^2 = 2x_1y_1-2x_2y_2$ (1)

$3x_2^2+3y_2^2-3x_3^2-3y_3^2 = 2x_2y_2-2x_3y_3$ (2)

din (1): $3x_1^2+3y_1^2-3x_2^2-3y_2^2 = 2x_1y_1-2x_2y_2$

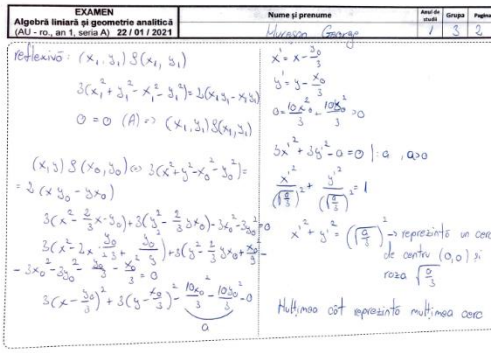
Înlocuim în (2):

$3x_1^2+3y_1^2-2x_1y_1-\cancel{3x_2^2}-\cancel{3y_2^2}-3x_3^2-3y_3^2 = \cancel{2x_2y_2}-2x_3y_3$

$3x_1^2+3y_1^2-2x_1y_1-3x_3^2-3y_3^2 = -2x_3y_3$

$3(x_1^2+y_1^2-x_3^2-y_3^2) = 2(x_1y_1-x_3y_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1,y_1)\,\rho\,(x_3,y_3)$



EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Huzaco George	1	3	2

Reflexivă: $(x_1,y_1)\,\rho\,(x_1,y_1)$

$3(x_1^2+y_1^2-x_1^2-y_1^2) = 2(x_1y_1-x_1y_1)$

$0=0$ (A) $\Leftrightarrow (x_1,y_1)\,\rho\,(x_1,y_1)$

$(x,y)\,\rho\,(x_0,y_0) \Leftrightarrow 3(x^2+y^2-x_0^2-y_0^2) = 2(xy-x_0y_0)$

$3(x^2-\frac{2}{3}x\cdot y_0+3(y^2-\frac{2}{3}y\cdot x_0)-3x_0^2-3y_0^2=0$

$3(x^2-2x\cdot\frac{y_0}{3}+\frac{y_0^2}{9})+3(y^2-\frac{2}{3}yx_0+\frac{x_0^2}{9})-$

$-3x_0^2-3y_0^2-\frac{2x_0^2}{3}-\frac{2y_0^2}{3}=0$

$3(x-\frac{y_0}{3})^2+3(y-\frac{x_0}{3})^2-\underbrace{\frac{10x_0^2}{3}-\frac{10y_0^2}{3}}_{a}=0$

$x'=x-\frac{y_0}{3}$

$y'=y-\frac{x_0}{3}$

$a=\frac{10x_0^2}{3}-\frac{10y_0^2}{3}>0$

$3x'^2+3y'^2-a=0 \mid :a,\ a>0$

$\frac{x'^2}{(\sqrt{\frac{a}{3}})^2}+\frac{y'^2}{(\sqrt{\frac{a}{3}})^2}=1$

$x'^2+y'^2=(\sqrt{\frac{a}{3}})^2 \Rightarrow$ reprezintă un cerc de centru $(0,0)$ și raza $\sqrt{\frac{a}{3}}$

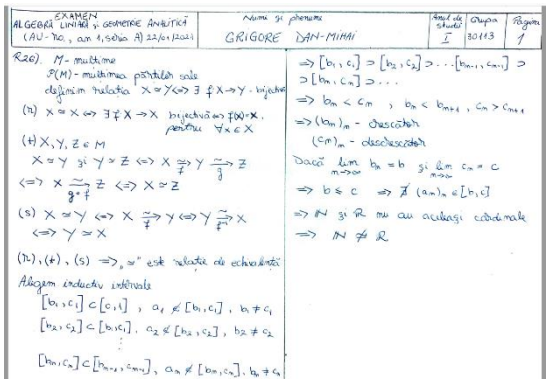
Mulțimea cât reprezintă mulțimea cerc

Relatii 26:

R-26

Fie M o mulțime și $\mathcal{P}(M)$ mulțimea părților sale. Pe $\mathcal{P}(M)$ definim relația $X \simeq Y \Leftrightarrow$ există funcție bijectivă $f : X \to Y$. Să se arate că "$\simeq$" este o relație de echivalență și că:

$$\mathbb{N} \not\simeq \mathbb{R}.$$

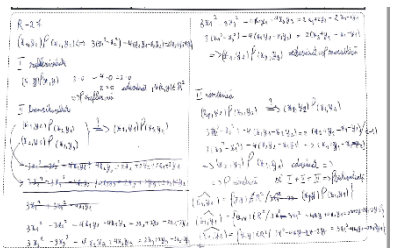


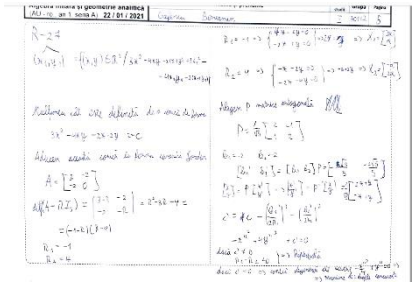
Relatii 27:

R-27

Pe mulțimea punctelor planului $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ se consideră relația $\rho \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Să se arate că ρ este o relație de echivalență, să se determine clasele și mulțimea cât, unde:

$$(x_1, y_1)\rho(x_2, y_2) \Leftrightarrow 3(x_1^2 - x_2^2) - 4(x_1y_1 - x_2y_2) = 2(x_2 + y_2 - x_1 - y_1).$$





Relatii 28:

R-28

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $H \subset G$ un subgrup. Pe G definim relația $\rho_H \subset G \times G$ astfel:

$$x, y \in G,\ x\rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H.$$

Să se arate că ρ_H este o relație de echivalență pe G și să se determine clasele și mulțimea cât în cazul:

$$G = (\mathbb{R}^*, \cdot), \quad H = ((0, \infty), \cdot).$$

$\boxed{R\text{-}23}$ rezolvat pe foile

$\boxed{R\text{-}25}$ ✓

$x \rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H$

$G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $H = ((0,\infty), \cdot)$

Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$

$x \rho_H y \Leftrightarrow x^{-1} y \in (0, +\infty) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \cdot y \in (0, +\infty) \rightarrow \frac{y}{x} > 0$

Fie $f: \mathbb{R}^* \to \{-1, 1\}$,

$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \rho_H = \ker f$

$\Rightarrow \hat{x} = \{ y \in \mathbb{R}^* \mid \frac{y}{x} > 0 \}$

clasele de resturi: $\{-1, 1\}$

Relatii 29:

R-29

Să se arate că mulțimile M și $\mathcal{P}(M)$ au cardinale diferite.

1.2.4(d) cartea de seminar;

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA, TI-RO, an 1, seria A) 18/01/2021	Nume și prenume Tivadar Maria Simona	Anul de studii 1	Grupa 30213	Pagina 1

Se va arata ca M și P(M) au cardinale diferite
unde P(M) - mulțimea părților lui M
Cerința este echivalentă cu a demonstra că
$\nexists f: M \to P(M)$ astfel încât f - bijectivă
presupun că M are $m \in \mathbb{N}^*$ elemente
$\Rightarrow M = \{a_1, a_2, \dots a_m\}$ $|M| = m$

P(M) reprezintă reuniunea tuturor submulțimilor lui M

$C_m^0 = 1$ submulțime cu 0 elemente ($\emptyset$)
$C_m^1 = m$ submulțimi cu 1 element ($\{a_1\}, \{a_2\}, \dots \{a_m\}$)
$C_m^2 = \frac{(m-1)m}{2}$ submulțimi cu 2 elemente
$\vdots$
$C_m^m = 1$ submulțime cu m elemente (M)

Prin însumare $\Rightarrow$
$\Rightarrow |P(M)| = C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^m = 2^m$

$|M| = m$

$2^m \neq m$
$\forall m \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow$ mulțimile au cardinale diferite
(nu s-ar putea face vreo bijecție între ele)

Relatii 30:

R-30

Pe mulțimea numerelor reale definim relația ρ. Să se arate că ρ este o relație de echivalență, să se determine clasele și mulțimea cât, unde:

$$x \rho y \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 2) = 0.$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	CONSTANTIN IONUT	1	30112	4

R-30 $x \rho y \Leftrightarrow (x-y)(x+y+2)=0$

rel de echiv $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{reflexivă } (r) \\ \text{tranzitivă } (t) \\ \text{simetrică } (s) \end{cases}$

(r) $x \rho x, (\forall) x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x-x)(x+x+2)=0$

$0 \cdot (2x+2)=0 \quad 0=0$ adevărat $(\forall) x \in \mathbb{R}$

(t) $x \rho y$ și $y \rho z \Rightarrow x \rho z$

$\begin{cases} x \rho y \Rightarrow (x-y)(x+y+2)=0 \Rightarrow \text{dacă } x-y=0 \Rightarrow x=y \\ y \rho z \Rightarrow (y-z)(y+z+2)=0 \Rightarrow (x-z)(x+z+2)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow x \rho z \ (\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$

(s) $x \rho y \Rightarrow y \rho x$

$(x-y)(x+y+2)=0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y \Rightarrow$

$\Rightarrow 0=y-x \Rightarrow (y-x)(y+x+2)=0 \Rightarrow$ ~~(t)~~

$\Rightarrow y \rho x \ (\forall) x, y \in \mathbb{R}$

- clasele de echivalență

$\hat{a}=\{x \in \mathbb{R} \mid x \rho a\}$

$x \rho a \Leftrightarrow (x-a)(x+a+2)=0$

$x-a=0 \Rightarrow x=a$

$x+a+2=0 \Rightarrow x=-a-2 \Rightarrow \hat{a}=\{a, -a-2\}$

- mulțimea cât: (def) $A/\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{R}/\{a, -a-2\}$

Geometrie 1:

G-1

Se consideră punctele coliniare A_1, A_2, A_3, A_4 astfel ca $A_1A_2 = A_3A_4$ și punctele coliniare B_1, B_2, B_3, B_4 astfel ca $B_1B_2 = B_3B_4$. Pe segmentele A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 se iau punctele M_1, M_2, M_3, M_4 astfel ca

$$\frac{A_1M_1}{A_1B_1} = \frac{A_2M_2}{A_2B_2} = \frac{A_3M_3}{A_3B_3} = \frac{A_4M_4}{A_4B_4}.$$

Să se arate că M_1, M_2, M_3, M_4 sunt vârfurile unui paralelogram.

GB $A_1A_2 = A_3A_4 \Rightarrow A_1A_2A_3A_4$ pg. $\Rightarrow r_{A_1} + r_{A_3} = r_{A_2} + r$

$B_1B_2 = B_3B_4 \Rightarrow B_1B_2B_3B_4$ pg $\Rightarrow r_{B_1} + r_{B_3} = r_{B_2}$

$$\frac{A_1M_1}{A_1B_1} = \frac{A_2M_2}{A_2B_2} = \frac{A_3M_3}{A_3B_3} = \frac{A_4M_4}{A_4B_4} = k$$

$\Rightarrow \bar{r}_{M_1} = (1-k)\bar{r}_{A_1} + k\bar{r}_{B_1}$ și analog

$\bar{r}_{M_2} = (1-k)r_{A_2} + k\bar{r}_{B_2}$

$\bar{r}_{M_3} = (1-k)\bar{r}_{A_3} + k\bar{r}_{B_3}$

$\bar{r}_{M_4} = (1-k)\bar{r}_{A_4} + k\bar{r}_{B_4}$

$\vec{r}_{M_1} + r_{M_3} = (1-k)(\bar{r}_{A_1} + \bar{r}_{A_3}) + k(\bar{r}_{B_1} + \bar{r}_{B_3})$

$= (1-k)(\bar{r}_{A_2} + \bar{r}_{A_4}) + k(\bar{r}_{B_2} + r_{B_4})$

$= \bar{r}_{M_2} + \vec{r}_{M_4}$

$\Rightarrow M_1M_2M_3M_4$ paralelogram.

Geometrie 2:

G-2

Se consideră paraboloidul hiperbolic $P_H : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$, planul $P : x + z = 1$ și punctul $A(2, 0, -1) \in P_H$.

a) Să se determine generatoarele rectilinii ce trec prin A și unghiul dintre ele.

b) Să se arate că P intersectează P_H după două drepte.

G4

$\Gamma: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$

$P: x+z=1$

$A(2,0,-1)$

a) $D_\lambda = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \lambda z \\ \lambda\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{2} + \frac{0}{3} = -\lambda \Rightarrow -\lambda = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$

$D_{-1} = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -z \mid \cdot 6 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -1 \mid \cdot 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = -6z \\ 3x - 2y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 6z = 0 \\ 3x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$

$\vec{d}_{-1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = 12\vec{i} - 12\vec{k} + 18\vec{j} = 12\vec{i} + 18\vec{j} - 12\vec{k} = 6(2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k})$

$D_\mu = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \mu \\ \mu\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) = z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mu = 1}$

$D_1 = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \mid \cdot 6 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = z \mid \cdot 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ 3x - 2y - 6z = 0 \end{cases}$

$\vec{d}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 18\vec{j} - 12\vec{k} = 6(-2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k})$

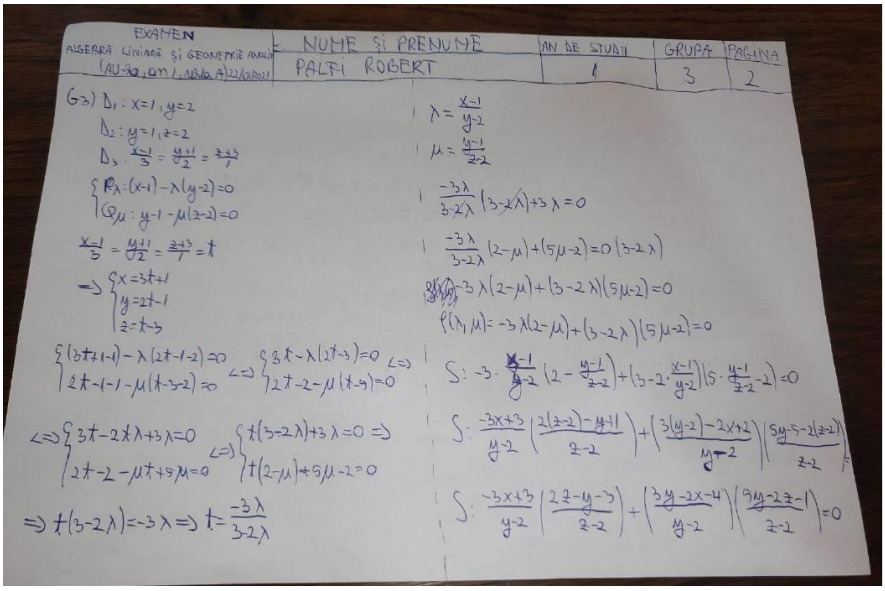
$\cos(D_{-1}, D_1) = \frac{\vec{d}_{-1} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}_{-1}\| \cdot \|\vec{d}_1\|} = \frac{-4 + 9 + 4}{4 + 9 + 4} = \frac{9}{17}$

Geometrie 3:

G-3

Să se determine ecuația suprafeței generată de dreptele D care se sprijină pe dreptele D_1, D_2, D_3.

$$D_1:\ x=1,\ y=2,\quad D_2:\ y=1,\ z=2,\quad D_3:\ \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{1}.$$



EXAMEN — ALGEBRĂ LINIARĂ ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ (AU-ro, an 1, seria A) 22/01/2021

NUME ȘI PRENUME	AN DE STUDIU	GRUPA	PAGINA
PALFI ROBERT	1	3	2

G-3) $D_1: x=1, y=2$

$D_2: y=1, z=2$

$D_3: \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{1}$

$\begin{cases} P_\lambda: (x-1)-\lambda(y-2)=0 \\ Q_\mu: y-1-\mu(z-2)=0 \end{cases}$

$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{1}=t$

$\Rightarrow \begin{cases} x=3t+1 \\ y=2t-1 \\ z=t-3 \end{cases}$

$\begin{cases} (3t+1-1)-\lambda(2t-1-2)=0 \\ 2t-1-1-\mu(t-3-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t-\lambda(2t-3)=0 \\ 2t-2-\mu(t-5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t-2t\lambda+3\lambda=0 \\ 2t-2-\mu t+5\mu=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(3-2\lambda)+3\lambda=0 \\ t(2-\mu)+5\mu-2=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow t(3-2\lambda)=-3\lambda \Rightarrow t=\frac{-3\lambda}{3-2\lambda}$

$\lambda=\frac{x-1}{y-2}$

$\mu=\frac{y-1}{z-2}$

$\frac{-3\lambda}{3-2\lambda}(3-2\lambda)+3\lambda=0$

$\frac{-3\lambda}{3-2\lambda}(2-\mu)+(5\mu-2)=0\ (3-2\lambda)$

$-3\lambda(2-\mu)+(3-2\lambda)(5\mu-2)=0$

$f(\lambda,\mu)=-3\lambda(2-\mu)+(3-2\lambda)(5\mu-2)=0$

$S: -3\cdot\frac{x-1}{y-2}\left(2-\frac{y-1}{z-2}\right)+\left(3-2\cdot\frac{x-1}{y-2}\right)\left(5\cdot\frac{y-1}{z-2}-2\right)=0$

$S: \frac{-3x+3}{y-2}\left(\frac{2(z-2)-y+1}{z-2}\right)+\left(\frac{3(y-2)-2x+2}{y-2}\right)\left(\frac{5y-5-2(z-2)}{z-2}\right)=$

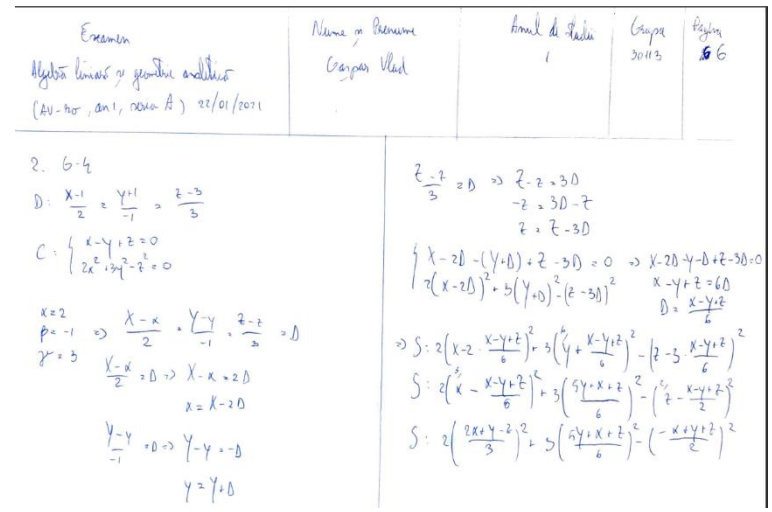
$S: \frac{-3x+3}{y-2}\left(\frac{2z-y-3}{z-2}\right)+\left(\frac{3y-2x-4}{y-2}\right)\left(\frac{3y-2z-1}{z-2}\right)=0$

Geometrie 4:

G-4

Să se determine ecuația suprafeței generate de dreptele paralele cu dreapta D și care se sprijină pe curba C.

$$D:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3},\quad C:\ \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x^2+3y^2-z^2=1. \end{cases}$$



Examen — Algebră liniară și geometrie analitică (AU-ro, an 1, seria A) 22/01/2021

Numele și Prenumele	Anul de studiu	Grupa	Pagina
Gergan Vlad	1	30113	6

2. G-4

$D: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$

$C: \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x^2+3y^2-z^2=0 \end{cases}$

$\alpha=2$, $\beta=-1$, $\gamma=3$ $\Rightarrow \frac{X-x}{2}=\frac{Y-y}{-1}=\frac{Z-z}{3}=D$

$\frac{X-x}{2}=D \Rightarrow X-x=2D$

$x=X-2D$

$\frac{Y-y}{-1}=D \Rightarrow Y-y=-D$

$y=Y+D$

$\frac{Z-z}{3}=D \Rightarrow Z-z=3D$

$-z=3D-Z$

$z=Z-3D$

$\begin{cases} X-2D-(Y+D)+Z-3D=0 \\ 2(X-2D)^2+3(Y+D)^2-(Z-3D)^2 \end{cases} \Rightarrow X-2D-Y-D+Z-3D=0$

$X-Y+Z=6D$

$D=\frac{X-Y+Z}{6}$

$\Rightarrow S: 2\left(X-2\cdot\frac{X-Y+Z}{6}\right)^2+3\left(Y+\frac{X-Y+Z}{6}\right)^2-\left(Z-3\cdot\frac{X-Y+Z}{6}\right)^2$

$S: 2\left(X-\frac{X-Y+Z}{6}\right)^2+3\left(\frac{5Y+X+Z}{6}\right)^2-\left(Z-\frac{X-Y+Z}{2}\right)^2$

$S: 2\left(\frac{2X+Y-Z}{3}\right)^2+3\left(\frac{5Y+X+Z}{6}\right)^2-\left(-\frac{X+Y+Z}{2}\right)^2$

Geometrie 5:

G-5

Un elipsoid opac de ecuație $x^2+4y^2+9z^2=1$ este luminat de o sursă punctuală aflată în $V(0,0,2)$. Să se determine curba care delimitează umbra lăsată pe planul $P:\ x+y+z=-10$.

G-7) $x^2+4y^2+9z^2=1$; $V(0,0,2)$; $P: x+y+z=-10$

Verif: $0^2+4\cdot 0^2+9\cdot 2^2=36>1 \Rightarrow$ e în ext. elipsoidului

Pr generatoare D:

$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z-2}{z-2}=t$; $X=xt$; $Y=yt$; $Z=2+t(z-2)$

$x^2t^2+4y^2t^2+9(2+t(z-2))^2=0$

cond. de tangenței $\Delta=0 \Leftrightarrow t_1=t_2$

$x^2t^2+4y^2t^2+36+36t(z-2)+t^2(z-2)^2=0$

$t^2((z-2)^2+x^2+4y^2)+t(36(z-2))+36=0$

$\Delta=(36(z-2))^2-4\cdot((z-2)^2+x^2+4y^2)\,36=0$

$=36^2(z^2-4z+4)-4\cdot 36(z^2-4z+4+x^2+4y^2)=0$

$=36^2(z-2)^2-144(z-2)^2-144x^2-576y^2=0$

$=-3\cdot 36(z-2)^2-144x^2-576y^2=0 \quad /\cdot(-1)$

$=108(z-2)^2+144x^2+576y^2=0 \quad /:36$

$=3(z-2)^2+4x^2+16y^2=0$

$4x^2+16y^2+3z^2-12z+12=0$ - ec conului

$\begin{cases} 4x^2+16y^2+3(z-2)^2=0 \\ x+y+z=-10 \end{cases} \Leftrightarrow$ Se face sistemul și

curba este f. din punctele rezultate

în sistem. $x_0, y(x_0), z(x_0)$

$\begin{cases} 4x^2+16y^2+3z^2-12z=-12 \\ x=-10-y-z \end{cases} \Leftrightarrow \ldots$ $\begin{cases} x_0 \\ y(x) \\ z(x_0) \end{cases}$

Geometrie 6:

G-6

Să se determine ecuația cilindrului circumscris sferelor:

$$\sigma_1:\ (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4,\quad \sigma_2:\ (x+1)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=4.$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU-no, an 1, seria A) 22/04/2021	Nume și prenume GRIGORE DAN-MIHAI	Anul de studiu I	Grupa 30143	Pagina 2

G6 - Să se determine ecuația cilindrului circumscris sferelor

$\sigma_1: (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$

$\sigma_2: (x+1)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=4$

Sferele au raze egale: $r_1=r_2=2$

Centrele sferelor: $C_1(1,-1,0)$ și $C_2(-1,1,5)$

Generatoarea cilindrului este paralelă cu dreapta C_1C_2 care are parametrii directori:

$\alpha=-1-1=-2$

$\beta=1-(-1)=2$

$\gamma=5-0=5$

Dreptele din spațiu paralele cu C_1C_2 au ecuațiile:

$D:\ \frac{X-x}{-2}=\frac{Y-y}{2}=\frac{Z-z}{5}=t,\ t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=X+2t \\ y=Y-2t \\ z=Z-5t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

Dreapta D este tangentă la cele două sfere, deci intersecția $D\cap\sigma_1$ sau ~~DAE~~ $D\cap\sigma_2$ să fie formată dintr-un singur punct.

Înlocuim în ecuația σ_1 ecuațiile dreptei D

$(x+2t-1)^2+(y-2t+1)^2+(z-5t)^2=4$

$33t^2+2t(2(x-1)-2(y+1)-5z)+(x-1)^2+(y+1)^2+z^2-4=0$

Condiția de tangență: $t_1=t_2 \Leftrightarrow \Delta(x,y,z)=0$

$\Rightarrow 4(2X-2Y-5Z-2)^2-4\cdot 33((X-1)^2+(Y+1)^2+Z^2-4)=0$

Ecuația suprafeței cilindrice

$S:(2X-2Y-5Z-2)^2-33((X-1)^2+(Y+1)^2+Z^2-4)=0$

Geometrie 7:

G-7

Să se arate că centrul sferei înscrise în tetraedrul $ABCD$ este dat de:

$$\overline{r}_I=\frac{S_a\cdot\overline{r}_A+S_b\cdot\overline{r}_B+S_c\cdot\overline{r}_C+S_D\cdot\overline{r}_D}{a+b+c+d},$$

unde S_A este aria feței BCD și analoagele.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI-no, an 1, seria A) 18/01/2021	Nume și prenume CRISAN SEBASTIAN-GABRIEL	Anul de studiu 1	Grupa 4

G-15: Să se arate că centrul sferei înscrise în tetraedrul ABCD este dat de

$\overline{r_I}=\frac{S_A\cdot\overline{r_A}+S_B\cdot\overline{r_B}+S_C\cdot\overline{r_C}+S_D\cdot\overline{r_D}}{a+b+c+d}$

unde S_A este aria feței BCD și analoagele

Soluție:

Arătăm că distanța de la I la fiecare față a tetraedrului este aceeași

$d(I,(BCD))=\frac{\|(\overline{BC},\overline{BD},\overline{BI})\|}{\|\overline{BC}\times\overline{BD}\|}=\frac{\|(\overline{BC},\overline{BD},\overline{r_I}-\overline{r_B})\|}{2S_A}=\frac{\|(\overline{BC},\overline{BD},\frac{S_A\cdot\overline{r_A}+S_B\cdot\overline{r_B}+S_C\cdot\overline{r_C}+S_D\cdot\overline{r_D}}{a+b+c+d}-\overline{r_B})\|}{2S_A}$

$=\frac{\|(\overline{BC},\overline{BD},\frac{S_A\cdot\overline{BA}+S_C\cdot\overline{BC}+S_D\cdot\overline{BD}}{a+b+c+d})\|}{2S_A}=\frac{k\cdot S_A\|(\overline{BC},\overline{BD},\overline{BA})\|}{2\cdot S_A(a+b+c+d)}=\frac{k}{2(a+b+c+d)}\cdot 6\cdot V_{ABCD}$

(unde $\frac{a}{S_A}=\frac{b}{S_B}=\frac{c}{S_C}=\frac{d}{S_D}=k$;

Analog calculăm distanțele am ace

$d(I,(BCD))=d(I,(ABD))=d(I,$

$=d(I,(ABC))\Rightarrow I$ centrul sfe

înscrin

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI-no, an 1, seria A) 18/01/2021	Nume și prenume CRISAN SEBASTIAN-GABRIEL	Anul de studiu 1	Grupa 4	Pagina 3

G-15

$d(I,(BCD))=\frac{\|(\overline{BC},\overline{BD},\overline{r_I}-\overline{r_B})\|}{2\cdot S_A}=\frac{\|(\overline{BC},\overline{BD},\frac{S_A\cdot\overline{r_A}+S_B\cdot\overline{r_B}+S_C\cdot\overline{r_C}+S_D\cdot\overline{r_D}}{S_D}-\overline{r_B})\|}{2\cdot S_A(S_A+S_B+S_C+S_D)}$

$=\frac{\|(\overline{BC},\overline{BD},S_A\cdot\overline{BA}+S_C\cdot\overline{BC}+S_D\cdot\overline{BD})\|}{2\cdot S_A(S_A+S_B+S_C+S_D)}$

$=\frac{S_A\cdot\|(\overline{BC},\overline{BD},\overline{BA})\|}{2\cdot S_A(S_A+S_B+S_C+S_D)}=\frac{1}{2(S_A+S_B+S_C+S_D)}\cdot 6\cdot V_{ABCD}=$ constant

Analog calculăm distanțe

Geometrie 8:

G-8

Să se determine ecuația suprafeței generată de drepte perpendiculare pe Oz, care se sprijină pe Oz și sunt tangente elipsoidului $E:\ 4x^2+(y-10)^2+9z^2=36$.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI-no, an 1, seria A) 18/01/2021	Nume și prenume Matteg Xenia-Alexandra	Anul de studiu 1	Grupa 30144	Pagina 2

2) G-30) Să se determine ecuația suprafeței generate de drepte perpendiculare pe Oz, care se sprijină pe Oz și sunt tangente elipsoidului E: $4x^2+(y-10)^2+9z^2=36$

$4x^2+(y-10)^2+9z^2=36\ |:36$

$\frac{4x^2}{36}+\frac{(y-10)^2}{36}+\frac{9z^2}{36}=\frac{36}{36}$

$\frac{x^2}{9}+\frac{(y-10)^2}{36}+\frac{z^2}{4}=1$

$\frac{x^2}{3^2}+\frac{(y-10)^2}{6^2}+\frac{z^2}{2^2}=1$

$\left.\begin{matrix} a=3 \\ b=6 \\ c=2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$ semiaxe

Geometrie 9:

G-9

Să se determine ecuația conului cu vârful V și care conține curba C:

$$V(2,-1,0),\quad C:\ x=e^s\cos s,\ y=e^s\sin s,\ z=e^{2s},\ s\in[0,2\pi].$$

G-9. Să se determine ecuația conului cu vârful V și care conține curba C.

$V(2,-1,0)$ $C: x = e^s \cos s$ $y = e^s \sin s$, $z = e^{2s}$

Pentru orice punct $M(x,y,z)$ de pe curbă obținem câte o generatoare a conului VM de ecuații

$$\frac{x-a}{x-a} = \frac{y-b}{y-b} = \frac{z-c}{z-c}$$

$a = 2$ $b = -1$ $c = 0$

$$\frac{x-2}{x-2} = \frac{y+1}{y+1} = \frac{z}{z}$$

$$\frac{x-2}{x-2} = s \Rightarrow x = s(x-2)+2$$

$$\frac{y+1}{y+1} = s \Rightarrow y = s(y+1)-1$$

$$\frac{z}{z} = s \Rightarrow z = zs$$

$S: x = 2 + s(e^s \cos s - 2)$ $y = s(e^s \sin s - 1)$

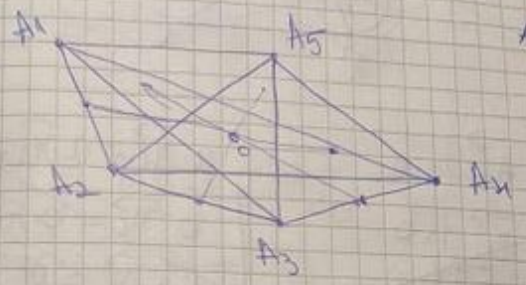
$z = e^{2s} s$

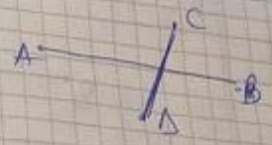
Geometrie 10:

G-10

Fie A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 cinci puncte în spațiu. Pentru fiecare pereche (A_i, A_j) notăm cu M_{ij} mijlocul segmentului $[A_iA_j]$, $i \neq j$ și cu G_{ij} centrul de greutate al triunghiului format cu punctele rămase. Să se arate că cele 10 drepte $M_{ij}G_{ij}$, $i \neq j$, sunt concurente.

A_2, A_3, A_4, A_5





$$\overrightarrow{M_{12}G_{12}} = \overrightarrow{r_{G_{12}}} - \overrightarrow{r_{M_{12}}} = \frac{\overrightarrow{r_{A_3}}+\overrightarrow{r_{A_4}}+\overrightarrow{r_{A_5}}}{3} - \frac{\overrightarrow{r_{A_1}}+\overrightarrow{r_{A_2}}}{2}$$

$$\overrightarrow{M_{13}G_{13}} = \overrightarrow{r_{G_{13}}} - \overrightarrow{r_{M_{13}}} = \frac{\overrightarrow{r_{A_2}}+\overrightarrow{r_{A_4}}+\overrightarrow{r_{A_5}}}{3} - \frac{\overrightarrow{r_{A_1}}+\overrightarrow{r_{A_3}}}{2}$$

$$\overrightarrow{M_{14}G_{14}} = \overrightarrow{r_{G_{14}}} - \overrightarrow{r_{M_{14}}} = \frac{\overrightarrow{r_{A_2}}+\overrightarrow{r_{A_3}}+\overrightarrow{r_{A_5}}}{3} - \frac{\overrightarrow{r_{A_1}}+\overrightarrow{r_{A_4}}}{2}$$

$$\overrightarrow{M_{15}G_{15}} = \frac{\overrightarrow{r_{A_2}}+\overrightarrow{r_{A_3}}+\overrightarrow{r_{A_4}}}{3} - \frac{\overrightarrow{r_{A_1}}+\overrightarrow{r_{A_5}}}{2}$$

$$\overrightarrow{M_{23}G_{23}} = \frac{\overrightarrow{r_{A_1}}+\overrightarrow{r_{A_4}}+\overrightarrow{r_{A_5}}}{3} - \frac{\overrightarrow{r_{A_2}}+\overrightarrow{r_{A_3}}}{2}$$

$$\overrightarrow{M_{24}G_{24}} = \frac{\overrightarrow{r_{A_1}}+\overrightarrow{r_{A_3}}+\overrightarrow{r_{A_5}}}{3} - \frac{\overrightarrow{r_{A_2}}+\overrightarrow{r_{A_4}}}{2}$$

$$\overrightarrow{M_{25}G_{25}} = \frac{\overrightarrow{r_{A_1}}+\overrightarrow{r_{A_3}}+\overrightarrow{r_{A_4}}}{3} - \frac{\overrightarrow{r_{A_2}}+\overrightarrow{r_{A_5}}}{2}$$

$$\overrightarrow{M_{34}G_{34}} = \frac{\overrightarrow{r_{A_1}}+\overrightarrow{r_{A_2}}+\overrightarrow{r_{A_5}}}{3} - \frac{\overrightarrow{r_{A_3}}+\overrightarrow{r_{A_4}}}{2}$$

$$\overrightarrow{M_{35}G_{35}} = \frac{\overrightarrow{r_{A_1}}+\overrightarrow{r_{A_2}}+\overrightarrow{r_{A_4}}}{3} - \frac{\overrightarrow{r_{A_3}}+\overrightarrow{r_{A_5}}}{2}$$

$$\overrightarrow{M_{45}G_{45}} = \frac{\overrightarrow{r_{A_1}}+\overrightarrow{r_{A_2}}+\overrightarrow{r_{A_3}}}{3} - \frac{\overrightarrow{r_{A_4}}+\overrightarrow{r_{A_5}}}{2}$$

$\overrightarrow{r_{A_1}}$ $\frac{6}{3} - \frac{4}{2} = 2-2=0$ $\overrightarrow{r_{A_2}}$ $\frac{6}{3} - \frac{4}{2} = 2-2$

Geometrie 11:

G-11

În triunghiul ABC notăm cu I centrul cercului înscris și O centrul cercului circumscris. Să se arate că:

$$\overline{r}_I = \frac{a \cdot \overline{r}_A + b \cdot \overline{r}_B + c \cdot \overline{r}_C}{a+b+c}, \quad \overline{r}_O = \frac{\sin 2A \cdot \overline{r}_A + \sin 2B \cdot \overline{r}_B + \sin 2C \cdot \overline{r}_C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}.$$

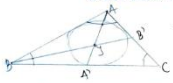
EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	RACHERIU NICOLAE	1	301/3	2

G-11)

ΔABC, I-centrul cercului înscris, O-centrul cercului circumscris

Să se arate că $\vec{r}_I = \dfrac{a\cdot\vec{r}_A + b\cdot\vec{r}_B + c\cdot\vec{r}_C}{a+b+c}$

$\vec{r}_O = \dfrac{\sin 2A\cdot\vec{r}_A + \sin 2B\cdot\vec{r}_B + \sin 2C\cdot\vec{r}_C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$



$AB = c$
$AC = b$
$BC = a$

I-centrul cercului înscris $\Rightarrow [AA'], [B,B']$ - bisectoare

Teorema bisectoarei (în $\Delta ABA'$) $\Rightarrow \dfrac{AB}{BA'} = \dfrac{AI}{IA'}$ (*)

Teorema bisectoarei (în ΔABC) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BA'}{A'C}$ (**) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AB+AC} = \dfrac{BA'}{BA'+A'C} \Rightarrow \dfrac{AB}{AB+AC} = \dfrac{BA'}{BC} \Rightarrow BA' = \dfrac{BC\cdot AB}{AB+AC}$

$\Rightarrow BA' = \dfrac{a\cdot c}{b+c}$

(*) $\dfrac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \dfrac{AI}{IA'} \Rightarrow \dfrac{AI}{IA'} = \dfrac{b+c}{a} \overset{not}{=} k$

$\vec{r}_I = \dfrac{1}{k+1}\cdot\vec{r}_A + \dfrac{k}{k+1}\cdot\vec{r}_{A'} = \dfrac{1}{\frac{b+c}{a}+1}\cdot\vec{r}_A + \dfrac{\frac{b+c}{a}}{\frac{b+c}{a}+1}\cdot\vec{r}_{A'}$

$\Leftrightarrow \vec{r}_I = \dfrac{a}{a+b+c}\cdot\vec{r}_A + \dfrac{b+c}{a+b+c}\cdot\vec{r}_{A'}$

(**) $\dfrac{BA'}{A'C} = \dfrac{c}{b} \overset{not}{=} \ell \Rightarrow \vec{r}_{A'} = \dfrac{1}{\ell+1}\cdot\vec{r}_B + \dfrac{\ell}{\ell+1}\cdot\vec{r}_C$

$\Rightarrow \vec{r}_{A'} = \dfrac{1}{\frac{c}{b}+1}\cdot\vec{r}_B + \dfrac{\frac{c}{b}}{\frac{c}{b}+1}\cdot\vec{r}_C = \dfrac{b}{b+c}\cdot\vec{r}_B + \dfrac{c}{b+c}\cdot\vec{r}_C$

$\Rightarrow \vec{r}_I = \dfrac{a}{a+b+c}\cdot\vec{r}_A + \dfrac{b+c}{a+b+c}\cdot\dfrac{b}{b+c}\cdot\vec{r}_B + \dfrac{b+c}{a+b+c}\cdot\dfrac{c}{b+c}\cdot\vec{r}_C$

$\Rightarrow \vec{r}_I = \dfrac{a}{a+b+c}\cdot\vec{r}_A + \dfrac{b}{a+b+c}\cdot\vec{r}_B + \dfrac{c}{a+b+c}\cdot\vec{r}_C$

$\Rightarrow \vec{r}_I = \dfrac{a\vec{r}_A + b\vec{r}_B + c\vec{r}_C}{a+b+c}$

Geometrie 12:

G-12

Fie $ABCD$ un tetraedru cu proprietatea $AB \perp CD$ și $AC \perp BD$. Să se arate că:
a) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.
b) Mijloacele muchiilor se găsesc pe o sferă.

$\Rightarrow V(A_1, B_1, C_1, D_1) = \frac{1}{6} |(2\bar{r}_C, 2\bar{r}_D, -2\bar{r}_B) + (2\bar{r}_C, -2\bar{r}_B, -\bar{r}_D) +$

$+ (-3\bar{r}_B, -\bar{r}_C, -\bar{r}_D)| =$

$= \frac{1}{6} |-8(\bar{r}_B, \bar{r}_C, \bar{r}_D) - 4(\bar{r}_B, \bar{r}_C, \bar{r}_D) - 3(\bar{r}_B, \bar{r}_C, \bar{r}_D)|$

$= \frac{1}{6} \cdot 15 |\bar{r}_B, \bar{r}_C, \bar{r}_D| = 15 V(ABCD)$

$\boxed{G-3}$

ABCD tetraedru $AB \perp CD$ și $AC \perp BD$.

a) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

$AB^2 + CD^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = |\bar{r}_B - \bar{r}_A|^2 + |\bar{r}_D - \bar{r}_C|^2 =$

$= \bar{r}_A^2 + \bar{r}_B^2 + \bar{r}_C^2 + \bar{r}_D^2 - 2(\bar{r}_A \bar{r}_B + \bar{r}_C \bar{r}_D)$

$AD^2 + BC^2 = \bar{r}_A^2 + \bar{r}_B^2 + \bar{r}_C^2 + \bar{r}_D^2 - 2(\bar{r}_D \cdot \bar{r}_A + \bar{r}_B \cdot \bar{r}_C)$

cum $AB \perp CD \rightarrow \bar{r}_B \cdot \bar{r}_D - \bar{r}_B \cdot \bar{r}_C - \bar{r}_A \cdot \bar{r}_D + \bar{r}_A \cdot \bar{r}_C = 0$

$\Rightarrow \bar{r}_A \bar{r}_B + \bar{r}_C \cdot \bar{r}_D = \bar{r}_D \cdot \bar{r}_A + \bar{r}_B \cdot \bar{r}_C \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ analog $= AC^2 + BD^2$

c) Arătăm că sfera are centru în G. Fie M mij AB

$GM^2 = \overline{GM}^2 (\bar{r}_M - \bar{r}_G)^2 = \left(\frac{\bar{r}_A + \bar{r}_B}{2} - \frac{\bar{r}_A + \bar{r}_B + \bar{r}_C + \bar{r}_D}{4}\right)^2$

$= \frac{1}{16} [(\bar{r}_A - \bar{r}_D) + (\bar{r}_B - \bar{r}_C)]^2 = \frac{1}{16} (\overline{AD} + \overline{CB})^2 = \frac{1}{16} (AD^2 + CB^2 + 2 \underset{4}{\underset{\cos}{\angle}} AD, BC)$

Geometrie 13:

G-13

Să se determine ecuația cilindrului cu generatoarea paralelă cu dreapta D, circumscris elipsoidului E și să se arate că curba de tangență este curbă plană.

$$D:\ \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1},\quad E:\ x^2+2y^2+3z^2=1.$$

23)

$$D=\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$$

$$E: x^2+2y^2+3z^2=1$$

$$D': \frac{X-x}{3}=\frac{Y-y}{2}=\frac{Z-z}{1}=\Delta$$

$$X-x=3\Delta$$

$$\boxed{\begin{aligned} x&=X-3\Delta\\ y&=Y-2\Delta\\ z&=Z-\Delta\end{aligned}}$$

$$(X-3\Delta)^2+2(Y-2\Delta)^2+3(Z-\Delta)^2=1$$

$$\cancel{X^2-6X\Delta+9\Delta^2+2(Y^2-4Y\Delta+4\Delta^2)+3(Z^2-2Z\Delta+\Delta^2)=1}$$

$$\cancel{X^2-6X\Delta+9\Delta^2+2Y^2-8Y\Delta+8\Delta^2+3Z^2-6Z\Delta+3\Delta^2-1=0}$$

$$\cancel{9\Delta^2+\Delta(-6X-8Y-6Z)+X^2+2Y^2+3Z^2+2=0}$$

$$X^2-6X\Delta+9\Delta^2+2(Y^2-4Y\Delta+4\Delta^2)+3(Z^2-2Z\Delta+\Delta^2)=1$$

$$X^2-6X\Delta+9\Delta^2+2Y^2-8Y\Delta+8\Delta^2+3Z^2-6Z\Delta+3\Delta^2-1=0$$

$$20\Delta^2+\Delta(-6X-8Y-6Z)+X^2+2Y^2+3Z^2-1=0$$

$$\cancel{\Delta_1-\Delta_2=0\ \Delta=0}\quad 20\Delta^2+2\Delta(-3X-4Y-3Z)+X^2+2Y^2+3Z^2-1=0$$

$$\cancel{\Delta=(-6X-8Y-6Z)^2}\quad \Delta=0$$

$$\boxed{S:\ (-3X-4y-3Z)^2-20(X^2+2Y^2+3Z^2-1)=0}$$

Geometrie 14:

G-14

Pe prelungirile laturilor AB, BC, CA ale triunghiului ABC se iau punctele C_1, A_1, B_1 astfel ca:

$$\overrightarrow{BA_1} = 3\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CB_1} = 3\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{AC_1} = 3\overrightarrow{AB}.$$

Să se arate că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ au același centru de greutate și să se determine raportul ariilor lor.

G-28

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GC_1} + \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{B_1C} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA} = 3 \cdot \vec{0}$

$\Rightarrow$ G - centru de greutate pentru $\Delta A_1B_1C_1$

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$p_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{2} = \frac{3a + 3b + 3c}{2} = 3p.$

$S_{A_1B_1C_1} = \sqrt{p_1(p_1-a_1)(p_1-b_1)(p_1-c_1)} = \sqrt{3p(3p-3a)(3p-3b)(3p-3c)}$

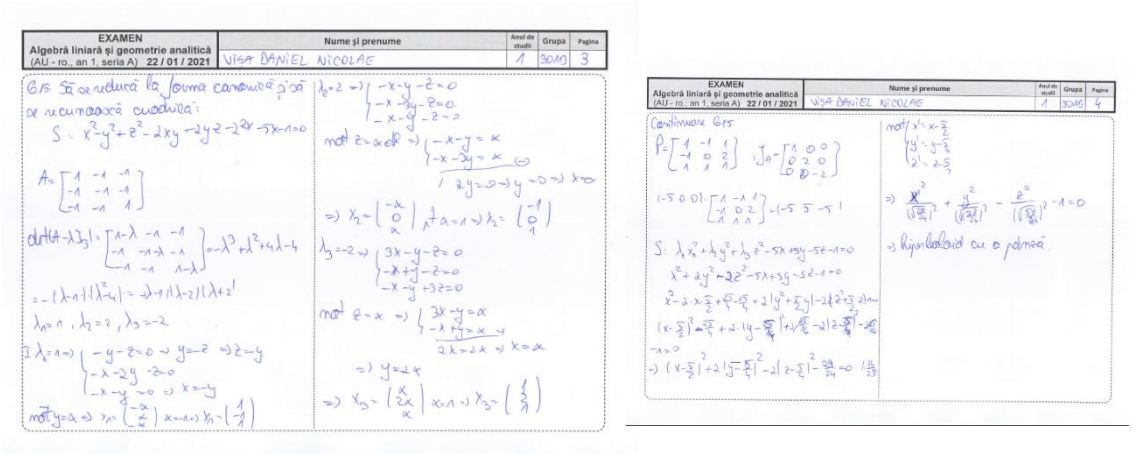
$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \sqrt{\frac{\cancel{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{3^4\,\cancel{p(p-a)(p-b)(p-c)}}} = \sqrt{\frac{1}{3^4}} = \frac{1}{9}$

Geometrie 15:

G-15

Să se reducă la formă canonică și să se recunoască cuadrica:

$$S:\ x^2 - y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - 5x - 1 = 0.$$



EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021 | Nume și prenume: VISA DANIEL NICOLAE | Anul de studii: 1 | Grupa: 3040 | Pagina: 3

G15. Să se reducă la forma canonică și să se recunoască cuadrica:

$S: x^2-y^2+z^2-2xy-2yz-2zx-5x-1=0$

$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$

$\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\-1&-1-\lambda&-1\\-1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+\lambda^2+4\lambda-4$

$=-(\lambda-1)(\lambda^2-4)=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)$

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-2$

1) $\lambda_1=1 \Rightarrow \begin{cases}-y-z=0\\-x-2y-z=0\\-x-y-z=0\end{cases} \Rightarrow y=-z \Rightarrow z=-y$

$\Rightarrow x=-y$

not $y=\alpha \Rightarrow X_1=\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\-\alpha\end{pmatrix}$ $\alpha=-1 \Rightarrow X_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=2 \Rightarrow \begin{cases}-x-y-z=0\\-x-2y-z=0\\-x-y-z=0\end{cases}$

not $z=\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases}-x-y=\alpha\\-x-2y=\alpha\end{cases} \ominus$

$2y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=0$

$\Rightarrow X_2=\begin{pmatrix}-\alpha\\0\\\alpha\end{pmatrix}$ pt $\alpha=1 \Rightarrow X_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_3=-2 \Rightarrow \begin{cases}3x-y-z=0\\-x+y-z=0\\-x-y+3z=0\end{cases}$

not $z=\alpha \Rightarrow \begin{cases}3x-y=\alpha\\-x+y=\alpha\end{cases} +$

$2x=2\alpha \Rightarrow x=\alpha$

$\Rightarrow y=2\alpha$

$\Rightarrow X_3=\begin{pmatrix}\alpha\\2\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$ $\alpha=1 \Rightarrow X_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021 | Nume și prenume: VISA DANIEL NICOLAE | Anul de studii: 1 | Grupa: 3040 | Pagina: 4

Continuare G15

$P=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&2\\1&1&1\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

$(-5\ 0\ 0)\cdot\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&2\\1&1&1\end{bmatrix}=(-5\ \ 5\ \ -5)$

$S: \lambda_1x_1^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2-5x+5y-5z-1=0$

$x^2+2y^2-2z^2-5x+5y-5z-1=0$

$x^2-2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\frac{25}{4}+2\left(y^2+\frac{5}{2}y\right)-2\left(z^2+\frac{5}{2}z\right)-1=0$

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+2\cdot\left(y-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}-2\left(z-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}-1=0$

$\Rightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{5}{4}\right)^2-2\left(z-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{39}{4}=0 \quad /:\frac{39}{4}$

not $\begin{cases}x'=x-\frac{5}{2}\\y'=y-\frac{5}{4}\\z'=z-\frac{5}{4}\end{cases}$

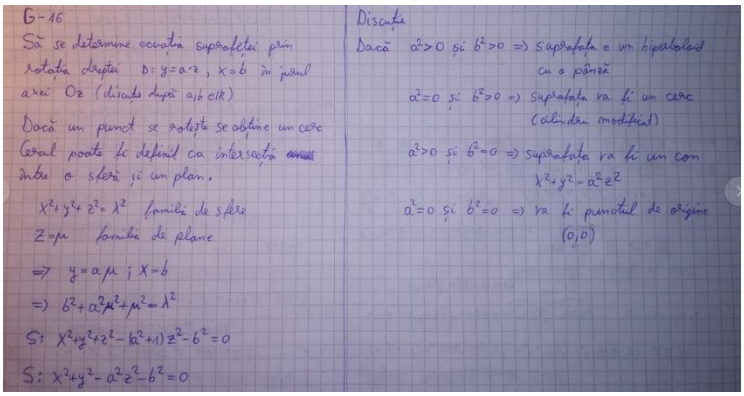
$\Rightarrow \frac{x'^2}{\left(\sqrt{\frac{39}{4}}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{39}{8}}\right)^2}-\frac{z'^2}{\left(\sqrt{\frac{39}{8}}\right)^2}-1=0$

$\Rightarrow$ hiperboloid cu o pânză.

Geometrie 16:

G-16

Să se determine ecuația suprafeței obținută prin rotația dreptei $D:\ y = a\cdot z,\ x = b$, în jurul axei Oz (discuție după $a, b \in \mathbb{R}$).



G-16

Să se determine ecuația suprafeței prin rotația dreptei $D: y=a\cdot z$, $x=b$ în jurul axei Oz (discuție după $a,b\in\mathbb{R}$)

Dacă un punct se rotește se obține un cerc. Cercul poate fi definit ca intersecția ~~dintre~~ între o sferă și un plan.

$x^2+y^2+z^2=\lambda^2$ familia de sfere

$z=\mu$ familia de plane

$\Rightarrow y=a\mu$; $x=b$

$\Rightarrow b^2+a^2\mu^2+\mu^2=\lambda^2$

$S: x^2+y^2+z^2-(a^2+1)z^2-b^2=0$

$S: x^2+y^2-a^2z^2-b^2=0$

Discuție

Dacă $a^2>0$ și $b^2>0 \Rightarrow$ suprafața e un hiperboloid cu o pânză

$a^2=0$ și $b^2>0 \Rightarrow$ suprafața va fi un cerc (cilindru modificat)

$a^2>0$ și $b^2=0 \Rightarrow$ suprafața va fi un con $x^2+y^2=a^2z^2$

$a^2=0$ și $b^2=0 \Rightarrow$ va fi punctul de origine $(0,0)$

Geometrie 17:

G-17

În tetraedrul $ABCD$ avem: $AB \perp CD$ și $AC \perp BD$. Să se arate că înălțimile tetraedrului sunt concurente.

12.2.4 seminar

$\boxed{G14}$ Fie $ABCD$ tetraedru

P H intersecția înălțimilor din A, B, C.

$\vec{HA} = \vec{a}$, $\vec{HB} = \vec{b}$, $\vec{HC} = \vec{c}$, $\vec{HD} = \vec{d}$

$HA \perp BCD \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{BC} = 0$. $\quad \vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) = 0$

și $\vec{a} \cdot \vec{BD} = 0$. $\quad \vec{a}(\vec{d} - \vec{b}) = 0$.

$\Downarrow \vec{a}\vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{d}$

analog $HB \perp A(CD)$ $\quad \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d}$

$HC \perp (ABD)$ $\quad \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{d}$

În concluzie $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{c} \cdot \vec{d}$

notăm relațiile $\vec{d} \cdot \vec{a} = \vec{d} \cdot \vec{b} = \vec{d} \cdot \vec{c}$

$\Rightarrow \vec{d}(\vec{b} - \vec{a}) = 0$
$\vec{d}(\vec{c} - \vec{a}) = 0$ $\Rightarrow d \perp AB$, $d \perp AC \Rightarrow HD \perp (ABC)$

$\Rightarrow H$ intersecția ~~a~~ înălțimilor tetraedrului.

Geometrie 18:

G-18

Să se reducă la formă canonică și să se recunoască cuadrica:

$$S: \ 3y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0.$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA, Ti-tro., an 1, seria A) 18/01/2021	Numele și prenumele	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Giesswein Alexia	1	30215	2

Problema 2 (Varianta I)

$S: 3y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0$

$f(x,y,z) = 3y^2 + 4xy - 8xz - 4yz$ - partea pătratică a ecuației cuadricei

$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ - matricea simetrică a formei pătratice

Rezolvăm: $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -4-\lambda \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \cancel{(4-\lambda)(3-\lambda)\cdot\lambda + 4(4-\lambda) + 0 - 4(3-\lambda)(4-\lambda) - 0 + 4(4-\lambda) = 0}$

$\Leftrightarrow (4+\lambda)(3-\lambda)\cdot\lambda - 4(3-\lambda)(4+\lambda) + 4(4+\lambda) + 4(4+\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow (4+\lambda)(3-\lambda)(\lambda-4) + 8(4+\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow (4+\lambda)(3\lambda - 12 - \lambda^2 + 4\lambda + 8) = 0$

$\Leftrightarrow (4+\lambda)(-\lambda^2 + 7\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4$,

$\lambda_2 = \frac{-7+\sqrt{33}}{-2}$, $\lambda_3 = \frac{-7-\sqrt{33}}{-2}$

$\lambda_1: (A + 4I_n) \cdot X = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 4z = 0 \\ 2x + 7y - 2z = 0 \\ -4x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y = 0,\ x = z = \alpha \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

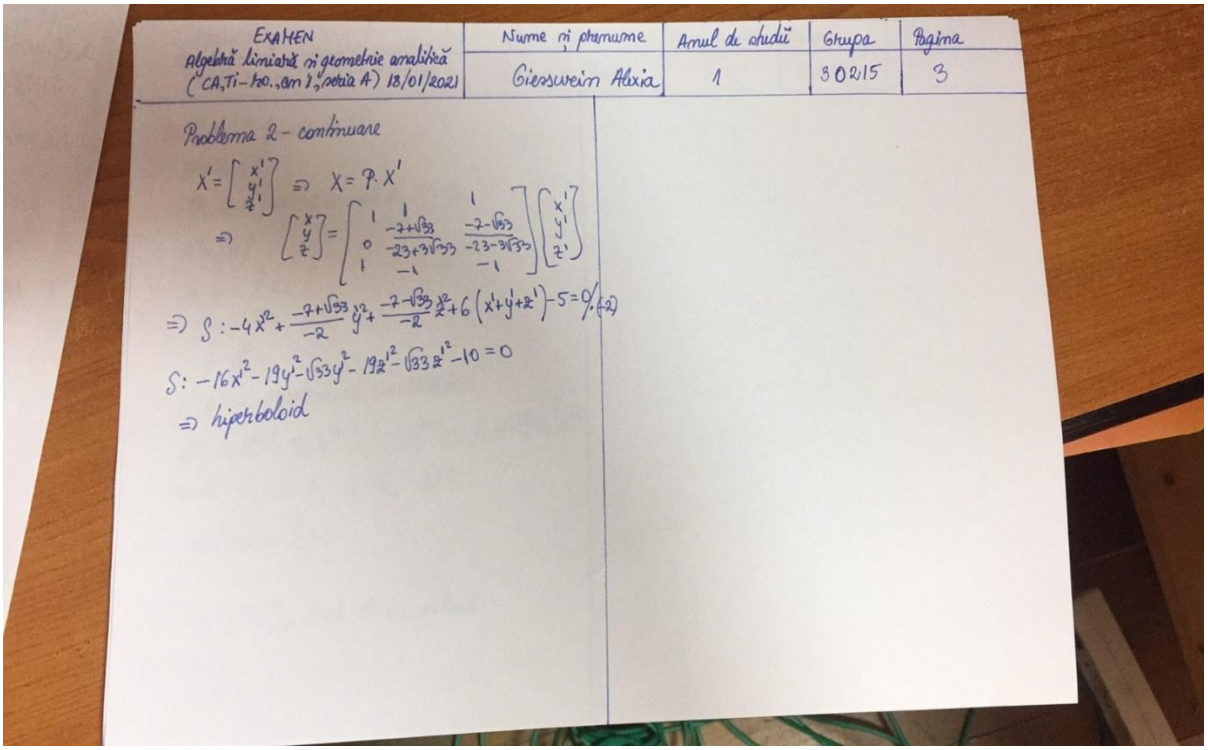
$\lambda_2: \left(A - \frac{-7+\sqrt{33}}{-2} I_n\right) \cdot X = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left(-\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}\right)x + 2y - 4z = 0 \\ 2x + \left(-\frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{33}}{2}\right)y - 2z = 0 \\ -4x - 2y + \left(\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}\right)z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = \frac{-7+\sqrt{33}}{-23+3\sqrt{33}}x \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{-7+\sqrt{33}}{-23+3\sqrt{33}}\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow X_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-7+\sqrt{33}}{-23+3\sqrt{33}} \\ -1 \end{bmatrix}$

$\lambda_3: \left(A - \frac{-7-\sqrt{33}}{-2} I_n\right) \cdot X = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left(-\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}\right)x + 2y - 4z = 0 \\ 2x + \left(-\frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{33}}{2}\right)y - 2z = 0 \\ -4x - 2y + \left(-\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}\right)z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = \frac{-7-\sqrt{33}}{-23-3\sqrt{33}}x \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{-7-\sqrt{33}}{-23-3\sqrt{33}}\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow X_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-7-\sqrt{33}}{-23-3\sqrt{33}} \\ -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-7+\sqrt{33}}{-23+3\sqrt{33}} & \frac{-7-\sqrt{33}}{-23-3\sqrt{33}} \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ - matricea de pasaj



EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA, Ti - ro., an 1, seria A) 18/01/2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Giesswein Alexia	1	30215	3

Problema 2 - continuare

$X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow X = P \cdot X'$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2+\sqrt{33}}{-23+3\sqrt{33}} & \frac{-2-\sqrt{33}}{-23-3\sqrt{33}} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$

$\Rightarrow S: -4x^2 + \frac{-7+\sqrt{33}}{-2} y^2 + \frac{-7-\sqrt{33}}{-2} z^2 + 6(x'+y'+z') - 5 = 0 \,/\cdot(-2)$

$S: -16x^2 - 19y'^2 - \sqrt{33}y^2 - 19z'^2 - \sqrt{33}z'^2 - 10 = 0$

$\Rightarrow$ hiperboloid

Geometrie 19:

G-19

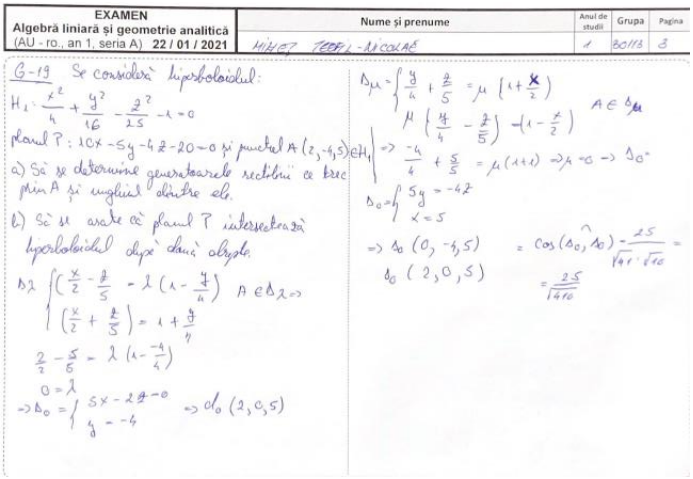
Se consideră hiperboloidul

$$H_1 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} - 1 = 0,$$

planul $P : 10x - 5y - 4z - 20 = 0$ și punctul $A(2, -4, 5) \in H_1$.

a) Să se determine generatoarele rectilinii ce trec prin A și unghiul dintre ele.

b) Să se arate că planul P intersectează hiperboloidul după două drepte.



EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	MIHAI TEOFIL-NICOLAE	1	30113	3

G-19 Se consideră hiperboloidul:

$H_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} - 1 = 0$

planul $P: 10x - 5y - 4z - 20 = 0$ și punctul $A(2, -4, 5) \in H_1$

a) Să se determine generatoarele rectilinii ce trec prin A și unghiul dintre ele.

b) Să se arate că planul P intersectează hiperboloidul după două drepte.

$\Delta_\lambda \begin{cases} \left(\frac{x}{2} - \frac{z}{5}\right) = \lambda\left(1 - \frac{y}{4}\right) \\ \left(\frac{x}{2} + \frac{z}{5}\right) = 1 + \frac{y}{4} \end{cases}$ $A \in \Delta_\lambda \Rightarrow$

$\frac{2}{2} - \frac{5}{5} = \lambda\left(1 - \frac{-4}{4}\right)$

$0 = \lambda$

$\Rightarrow \Delta_0 = \begin{cases} 5x - 2z = 0 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow d_0(2, 0, 5)$

$\Delta_\mu = \begin{cases} \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = \mu\left(1 + \frac{x}{2}\right) \\ \mu\left(\frac{y}{4} - \frac{z}{5}\right) = 1 - \frac{x}{2} \end{cases}$ $A \in \Delta_\mu$

$\Rightarrow \frac{-4}{4} + \frac{5}{5} = \mu(1+1) \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \Delta_0$

$\Delta_0 = \begin{cases} 5y = -4z \\ x = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta_0(0, -4, 5)$

$\Delta_0(2, 0, 5)$

$= \cos(\widehat{\Delta_0, \Delta_0}) = \frac{25}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{41}} = \frac{25}{\sqrt{1681}}$

Geometrie 20:

G-20

Să se determine distanța între dreptele D_1 și D_2 și ecuația perpendicularei comune.

$$D_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}, \quad D_2 : \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	ILCA ANDREA IULIANA	1	30113	2

G-20

Să se determine distanța între dreptele Δ_1 și Δ_2 și ecuația perpendicularei comune

$\Delta_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$ $\quad \Delta_2 : \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+1=0 \end{cases}$

$\Delta_2 = \begin{cases} -\frac{x}{3} = \frac{y}{3} \\ \frac{y}{3} = z - \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{-3} = \frac{y}{3} = \frac{z-\frac{1}{3}}{1}$

Deci vectorul director al dreptei Δ_2 este $(-3, 3, 1) = \vec{u_2}$

Punctul $M(-1, 2, -3) \in \Delta_1$

Ecuațiile dreptei Δ_3 ce trece prin M paralel cu Δ_2 este: $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{1}$

Vectorul director al dreptei Δ_1 este $\vec{u_1} = (1; 2, 3)$

Atunci vectorul normal al planului (α) determinat de dreptele Δ_1 și Δ_3 va fi:

$N = [\vec{u_1}, \vec{u_3}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-7, -10, 9)$

Deci ecuația acestui plan (α) ce trece prin $M(-1, 2, -3)$ este: $-7(x-(-1)) - 10(y-2) + 9(z-(-3)) = 0$

$-7x - 10y + 9z + 40 = 0$

Punctul $M_1(0, 0, \frac{1}{3})$ aparține dreptei Δ_2 iar $\alpha \parallel \Delta_2$ și $\Delta_1 \subset \alpha$. Atunci distanța dintre dreptele Δ_1 și Δ_2 este egală cu distanța dintre $M_1(0, 0, \frac{1}{3})$ și planul α

$\left| \frac{-7 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 9 \cdot \frac{1}{3} + 40}{\sqrt{(-7)^2 + (-10)^2 + 9^2}} \right| = \frac{43}{\sqrt{230}}$

Geometrie 21:

G-21

Să se determine ecuația conului circumscris sferelor

$$\sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{și} \quad \sigma_2 : (x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 25.$$

12.2.7 cartea de seminar;

Deschideți cu

(56)

$\sigma_1: x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow C_1(0,0,0),\ r_1=1$

$\sigma_2: (x-3)^2+(y-4)^2+z^2=25 \Rightarrow C_2(3,4,0),\ r_2=5$

$\frac{V_1C_1}{V_1C_2}=\frac{r_1}{r_2} \Rightarrow r_2\overrightarrow{V_1C_1}=r_1\overrightarrow{V_1C_2}$

$\frac{V_2C_2}{V_2C_2}=\frac{r_1}{r_2} \Rightarrow r_2\overrightarrow{V_2C_1}=-r_1\overrightarrow{V_2C_2}$

$\vec{r}_{V_1}=\frac{r_1\vec{r}_{C_2}-r_2\vec{r}_{C_1}}{r_1-r_2}=\frac{3\vec{i}+4\vec{j}}{-4} \Rightarrow V_1\left(-\frac{3}{4},-1,0\right)$

$\vec{r}_{V_2}=\frac{r_1\vec{r}_{C_2}+r_2\vec{r}_{C_1}}{r_1+r_2}=\frac{3\vec{i}+4\vec{j}}{6} \Rightarrow V_2\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},0\right)$

se construiesc cu V_1 ca sfere σ_1

$$\frac{x+\frac{3}{4}}{X+\frac{3}{4}}=\frac{y+1}{Y+1}=\frac{z}{Z}=\Delta,\ x^2+y^2+z^2=1$$

$$\frac{x+\frac{3}{4}}{X+\frac{3}{4}}=\Delta \Rightarrow x+\frac{3}{4}=\Delta\left(X+\frac{3}{4}\right)$$

$$x=\Delta\left(X+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}$$

$$y=\Delta(Y+1)-1$$

$$z=\Delta Z$$

$$\left(\Delta\left(X+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\Delta(Y+1)-1\right)^2+(\Delta Z)^2=1$$

$$\Delta^2\left(X+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{6\Delta\left(X+\frac{3}{4}\right)}{4}+\frac{9}{16}+\Delta^2(Y+1)^2-2\Delta(Y+1)+\cancel{1}+\Delta^2Z^2=\cancel{1}$$

$$\Delta^2\left[\left(X+\frac{3}{4}\right)^2+(Y+1)^2+Z^2\right]+\Delta\left(\frac{-3\Delta\left(X+\frac{3}{4}\right)}{2}-2(Y+1)\right)+\frac{9}{16}=0$$

condiție de tangență: $\Delta_1=\Delta_2$

$$\Delta=0$$

$$S_1=\left(\frac{-3\left(X+\frac{3}{4}\right)}{2}-2(Y+1)\right)^2-\frac{9}{16}\left[\left(X+\frac{3}{4}\right)^2+(Y+1)^2+Z^2\right]$$

continuare G6

$V_2\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 0\right)$ este afin $\sigma_1(\sigma_2)$

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{X-\frac{1}{2}} = \frac{y-\frac{2}{3}}{Y-\frac{2}{3}} = \frac{z}{Z} = \Delta \quad , x^2+y^2+z^2=1$$

$$x-\frac{1}{2} = \Delta\left(X-\frac{1}{2}\right)$$

$$x = \Delta\left(X-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

$$y = \Delta\left(Y-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}$$

$$z = \Delta Z$$

$$\left(\Delta\left(X-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\Delta\left(Y-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\right)^2+(\Delta Z)^2=1$$

$$\Delta^2\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\Delta\left(X-\frac{1}{2}\right)+\overset{9/1}{\frac{1}{4}}+\Delta^2\left(Y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4\Delta\left(Y-\frac{2}{3}\right)}{3}+\overset{4/4}{\frac{4}{9}}+\Delta^2 Z^2=1$$

$$\Delta^2\left(\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{2}{3}\right)^2+Z^2\right)+\Delta\left(X-\frac{1}{2}+\frac{4\left(Y-\frac{2}{3}\right)}{3}\right)+\underbrace{\frac{25}{36}-\overset{36}{1}}_{-\frac{11}{36}}=0$$

cond de tangență: $\Delta_1=\Delta_2$

$$\Delta=0$$

$$S_2: \left(X-\frac{1}{2}+\frac{4\left(Y-\frac{2}{3}\right)}{3}\right)^2+\frac{11}{36}\left(\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{2}{3}\right)^2+Z^2\right)$$

Geometrie 22:

12.2.4c cartea de seminar

G-22

Să se determine proiecția curbei C pe planul P.

$$C:\ x=\cos s,\ y=\sin s,\ z=2s,\ s\in\mathbb{R},\quad P:\ x+y-z=0.$$

G19

C: $x = \cos s$

$y = \sin s$

$z = 2s$

P: $x + y - z = 0$

$$\frac{X - x}{1} + \frac{Y - y}{1} + \frac{Z - z}{-1} = t$$

$$\frac{X - x}{1} = s \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} X = t + x \\ Y = t + y \end{array}} \Rightarrow \begin{cases} X = \cos s + t \\ Y = \sin s + t \\ Z = 2s - t \end{cases}$$

$$z - Z = s \Rightarrow \boxed{Z = z - t}$$

$$\cos s + t + \sin s + t - 2s + t = 0$$

$$\cos s + \sin s + 3t - 2s = 0$$

$$3t = 2s - \cos s - \sin s$$

$$t = \frac{2s - \cos s - \sin s}{3} \Rightarrow \begin{cases} X = \cos s + \dfrac{2s - \cos s - \sin s}{3} \\ Y = \sin s + \dfrac{2s - \cos s - \sin s}{3} \\ Z = 2s + \dfrac{-2s + \cos s + \sin s}{3} \end{cases}$$

Geometrie 23:

G-23

Să se determine ecuația torului eliptic, obținut prin rotația elipsei

$$E:\ x=0,\ (y-5)^2+4z^2=4$$

în jurul axei Oz.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	TRIFU RARES ALEXANDRU	I	30112	9

G) G-23

Să se determine ecuația torului eliptic, obținut prin rotația elipsei:

$E: x=0, (y-5)^2+4z^2=4$

în jurul axei Oz.

$S_\lambda: x^2+y^2+z^2=\lambda^2$

~~P_μ~~

$P_\mu: z=\mu$

$E: \begin{cases} \lambda^2+(y-5)^2+4z^2=4 \\ x=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y^2+\mu^2=\lambda^2 \\ (y-5)^2+\mu^2=4 \end{cases}$

$\Rightarrow 5(2y-5)=\lambda^2-4 \Rightarrow 10y=\lambda^2+21$

$\Rightarrow y=\frac{\lambda^2+21}{10}$

$\Rightarrow \left(\frac{\lambda^2+21}{10}\right)^2+\mu^2=\lambda^2$

$\Rightarrow \frac{(\lambda^2+21)^2}{100}+\mu^2=\lambda^2 \quad /\cdot 100$

$\Rightarrow (\lambda^2+21)^2=100(\lambda^2-\mu^2)$

$\Rightarrow (x^2+y^2+z^2+21)^2=100(x^2+y^2\cancel{+z^2-z^2})$

$\Rightarrow \underbrace{(x^2+y^2+z^2+21)^2=100(x^2+y^2)}_{\text{ecuația torului}}$

Geometrie 24:

G-24

Să se determine ecuația conului cu vârful V și care conține curba C:

$$V(1,2,3),\quad C:\ x-y+z=0,\ x^2+2y^2+3z^2=1.$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Năcăștă Mihai	I	30112	2

G-24

Fie $M(x,y,z)$ un punct de pe curbă.

Atunci ecuația generatoarei este:

$\frac{X-1}{x-1}=\frac{Y-2}{y-2}=\frac{Z-3}{z-3}=t$

$\frac{x-1}{X-1}=\frac{y-2}{Y-2}=\frac{z-3}{Z-3}=t$

$\Rightarrow \begin{cases} x=1+t(X-1) \\ y=2+t(Y-2) \\ z=3+t(Z-3) \end{cases}$

$C: \begin{cases} y=x+z \\ x^2+2(x+z)^2+3z^2=1 \end{cases}$ $\cancel{\Leftrightarrow \begin{cases} y+t(Y-2)= \end{cases}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+t(Y-2)=1+t(X-1)+3+t(Z-3) \\ (1+t(X-1))^2+2(4+t(X+Z-4))^2+3(3+t(Z-3))^2=1 \end{cases}$

$1+2t(X-1)+t^2(X-1)^2+2(16+8t(X+Z-4)+$
$+t^2(X+Z-4)^2)+3(9+6t(Z-3)+t^2(Z-3)^2)=1$

$t^2((X-1)^2+2(X+Z-4)^2+3(Z-3)^2)+$
$+t(2(X-1)+16(X+Z-4)+18(Z-3))+59=0$

$2+t(Y-2)=1+t(X-1)+3+t(Z-3)$

$t(Y-2-X+1-Z+3)=2$

$t=\frac{2}{Y-X-Z+2}$

Înlocuim în relația de mai sus.

Con: $\left(\frac{2}{Y-X-Z+2}\right)^2((X-1)^2+2(X+Z-4)^2+3(Z-3)^2)+$
$+\left(\frac{2}{Y-X-Z+2}\right)(2(X-1)+16(X+Z-4)+18(Z-3))+59=0$

Geometrie 25:

G-25

Să se determine ecuația suprafeței generate de dreptele paralele cu dreapta D și care se sprijină pe curba C.

$$D:\ \begin{cases} x-y+z-2=0 \\ -2x-y+z-1=0 \end{cases} \qquad C:\ \begin{cases} x=2\cos s \\ y=3\sin s \\ z=5s \end{cases} \qquad s\in[0,2\pi].$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Lăzăreanu Elena Fabiana	1	30113	6

G-25) Să se determine ecuația suprafeței generate de dreptele paralele cu dreapta D și care se sprijină pe curba C.

$$D: \begin{cases} x-y+z-2=0 \\ -2x-y+z-1=0 \end{cases} \qquad C: \begin{cases} x=2\cos s \\ y=3\sin s \\ z=5s \end{cases} ; s\in[0,2\pi]$$

$$\begin{cases} 2\cos s-3\sin s+5s-2=0 \\ -4\cos s-3\sin s+5s-1=0 \end{cases}$$

Dreapta D este scrisă ca intersecție de plane. Normalele la cele două plane sunt:

$\vec{n_1}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{n_2}=-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

$\Rightarrow$ vectorul director $\vec{d}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=-3(\vec{k}+\vec{j})$

Parametrii directori ai dreptei D sunt:

$\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=1$

Ecuațiile generatoarelor sunt:

$$\frac{X-x}{0}=\frac{Y-y}{1}=\frac{Z-z}{1}=t\in\mathbb{R}$$

sau: $\begin{cases} X=x \\ Y=y+t \\ Z=z+t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

$(x,y,z)\in C \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Obținem:

$S: X=2\cos s$, $Y=3\sin s+t$

$Z=5s+t$, $s\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}$

Geometrie 26:

11.2.12 seminar

G-26

Fie $ABCD$ un tetraedru. Notăm A_1 simetricul lui A față de B, B_1 simetricul lui B față de C, C_1 simetricul lui C față de D și D_1 simetricul lui D față de A. Să se arate că tetraedrul $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$ au același centru de greutate și să se determine raportul volumelor lor.

G

2. Fie ABCD un tetraedru. Notăm A_1 simetricul lui A față de B, B_1 simetricul lui B față de C, C_1 simetricul lui C față de D și D_1 simetricul lui D față de A. Să se arate ca tetraedrul ABCD și $A_1B_1C_1D_1$ au același centru de greutate și să se det. raportul volumelor lor.

G - centru de greutate pentru tetraedrul ABCD

G' - centru de greutate pentru tetraedrul A'B'C'D'

$$x=\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4} \qquad x'=\frac{x_{A'}+x_{B'}+x_{C'}+x_{D'}}{4}$$

$$y=\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4} \qquad y'=\frac{y_{A'}+y_{B'}+y_{C'}+y_{D'}}{4}$$

$$z=\frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4} \qquad z'=\frac{z_{A'}+z_{B'}+z_{C'}+z_{D'}}{4}$$

$x=x'$
$y=y'$
$z=z'$

$\Rightarrow$ cele 2 tetraedre au același centru de greutate

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Vasilache Andrei - Florin	1	3	2

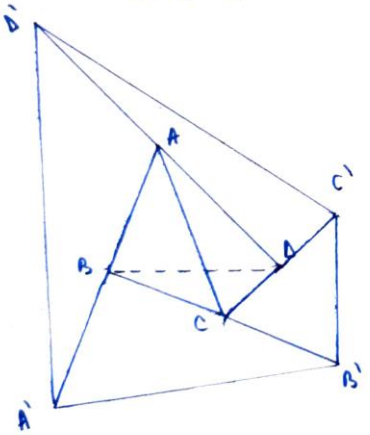
$ABCD$ - tetraedru

$A_1 = sim_B A$; $B_1 = sim_C B$; $C_1 = sim_D C$;

$D_1 = sim_A D$

$ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$ → aceleași centru de greutate (?)

Raportul volumelor lor?



Dacă notăm $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \bar{r}_C, \bar{r}_D$ vectorii de poziție ai vârfurilor avem:

$\bar{r}_{A_1} = 2\bar{r}_B - \bar{r}_A$, $\bar{r}_{B_1} = 2\bar{r}_C - \bar{r}_B$,

$\bar{r}_{C_1} = 2\bar{r}_D - \bar{r}_B$, $\bar{r}_{D_1} = 2\bar{r}_A - \bar{r}_D$

Și avem: $\bar{r}_G = \frac{1}{4}(\bar{r}_A + \bar{r}_B + \bar{r}_C + \bar{r}_D)$

Dar: $\bar{r}_{G_1} = \frac{1}{4}(\bar{r}_{A_1} + \bar{r}_{B_1} + \bar{r}_{C_1} + \bar{r}_{D_1}) = \bar{r}_G$

Deci $G = G_1$

Calculăm volumele cu ajutorul produsului mixt:

$V(A_1B_1C_1D_1) = \frac{1}{6}|(\overline{A_1B_1}, \overline{A_1C_1}, \overline{A_1D_1})| =$

$= \frac{1}{6}|(2\bar{r}_C - 3\bar{r}_B + \bar{r}_A, 2\bar{r}_D - 2\bar{r}_B - \bar{r}_C + \bar{r}_A, 3\bar{r}_A - 2\bar{r}_B - \bar{r}_D)|$

în care putem considera $\bar{r}_A = \bar{0}$ (alegem originea spațiului în A)

Deci vom obține: $V(A_1B_1C_1D_1) = \frac{1}{6}|(2\bar{r}_C, 2\bar{r}_D, -2\bar{r}_B) + (2\bar{r}_C, -2\bar{r}_B, -\bar{r}_D) + (-3\bar{r}_B, -\bar{r}_C, -\bar{r}_D)| =$

$= \frac{1}{6}|-8(\bar{r}_B, \bar{r}_C, \bar{r}_D) - 4(\bar{r}_B, \bar{r}_C, \bar{r}_D) - 3(\bar{r}_B, \bar{r}_C, \bar{r}_D)| =$

$= \frac{1}{6} \cdot 15|(\bar{r}_B, \bar{r}_C, \bar{r}_D)| = 15\, V(ABCD)$

Deci raportul volumelor este: $\frac{V(ABCD)}{V(A_1B_1C_1D_1)} = \frac{1}{15}$

Geometrie 27:

G-27

Să se determine ecuația conului cu vârful $V(-1, 5, 2)$ circumscris elipsoidului

$$E: \ 2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1.$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	BENDORFEAN HOREA IOAN	I	2	2

G-27) Să se determine ecuația conului cu vârful $V(-1,5,2)$ circumscris elipsoidului

$E: 2x^2+y^2+3z^2=1$

$2\cdot(-1)^2+5^2+3\cdot 2^2 \geq 1 \Rightarrow$ vârful V se află în exteriorul elipsoidului.

Dreptele care trec prin V și punct-um pe $E(x_1,y_1,z)$ de pe elipsoid au ecuațiile

$D: \frac{x_1+1}{x+1} = \frac{y_1-5}{y-5} = \frac{z_1-2}{z-2} = t \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x_1 = -1 + t(x+1) \\ y_1 = 5 + t(y-5) \\ z_1 = 2 + t(z-2) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$D \cap E \Rightarrow$

$2[-1+t(x+1)]^2 + [5+t(y-5)]^2 + 3[2+t(z-2)]^2 = 1$

$t_1 = t_2 \quad \Delta = 0$

$\Rightarrow 2(1 - 2t(x+1) + t^2(x+1)^2) + 25 + 10t(y-5) + t^2(y-5)^2 + 3(4 + 4t(z-2) + t^2(z-2)^2) = 1$

$\Rightarrow t^2(2(x+1)^2 + (y-5)^2 + 3(z-2)^2) + 2t(-2(x+1) + 5(y-5) + 6(z-2)) + 2 + 25 + 12 - 1 = 0$

$S: (-2x + 5y + 6z - 36)^2 - 152(2(x+1)^2 + (y-5)^2 + 3(z-2)^2) = 0$

Geometrie 28:

G-28

Să se determine ecuația suprafeței generată de drepte perpendiculare pe Oz, care se sprijină pe Oz și pe elicea conică $C: \ x = t\cos t, \ y = t\sin t, \ z = 2t, \ t \geq 0.$

12.2.11 seminar

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume FAGE SEBASTIAN-GEORGE	Anul de studii 1	Grupa 30214	Pagina 7

G20) Să se determine ecuația suprafeței generată de drepte perpendiculare pe Oz, care se sprijină pe Oz și pe elicea conică $C: \begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = 2t \end{cases}, t \geq 0$

$$D_{\lambda,\mu}: \begin{cases} z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ x - \mu y = 0, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \mu = \frac{x}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t = \lambda \Rightarrow t = \frac{\lambda}{2} \\ t\cos t - \mu t \sin t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t\cos\frac{\lambda}{2} - \mu t \sin\frac{\lambda}{2} = 0 \,|\, :t$$

$$\cos\frac{\lambda}{2} - \frac{x}{y}\sin\frac{z}{2} = 0 \,|\, \cdot y$$

$$\Rightarrow y\cos\frac{\lambda}{2} - x\sin\frac{z}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow y\cos\frac{z}{2} - x\sin\frac{z}{2} = 0$$

Geometrie 29:

G-29

Să se reducă la formă canonică și să se recunoască cuadrica:

$$S:\ 3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 4x + 8y + 4z = 0.$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume Hureson George	Anul de studii 1	Grupa 3	Pagina 3

G-29

$S: 3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 4x + 8y + 4z = 0$

Forma pătratică:

$f_{(x)} = 3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 2xy + 6xz + 2yz$

Matricea formei pătratice:

$$A_f = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_f - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 7-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1+C_3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & 3 \\ 2 & 7-\lambda & 1 \\ 6-\lambda & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1-C_2}{=} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 3 \\ -5+\lambda & 7-\lambda & 1 \\ -5-\lambda & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 7-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_1+L_2}{\underset{L_2+L_3}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 8-\lambda & 4 \\ 0 & 8-\lambda & 4-\lambda \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)\begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 \\ 8-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)(8-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)(8-\lambda)\lambda = 0$$

$\lambda = 8$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 & (1) \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 & (2) \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(3) \quad -8x_1 + 8x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 = \mu$

$x_1 = -\mu - x_2$

$x_2 = -2\mu$

Luăm $\mu = 1 \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume Hureson George	Anul de studii 1	Grupa 3	Pagina 4

$\lambda = 5$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = \mu$

$-5x_1 + 5x_3 = 0 \rightarrow x_1 = x_3 = \mu$

$2x_2 = -2\mu \Rightarrow x_2 = -\mu$

Pt $\mu = 1 \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 0$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \,|\, \cdot 3 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = \end{cases}$$

$\mu = 1$

$x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_3 = \mu \quad x_1 = -x_3 = -\mu \quad x_2 = 0$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{1} & -\sqrt{3} \\ -2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ -2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} x' + \sqrt{2}y' - \sqrt{3}z' \\ -2x' - \sqrt{2}y' \\ x' + \sqrt{2}y' + \sqrt{3}z' \end{bmatrix} \Rightarrow$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume Hureson George	Anul de studii 1	Grupa 3	Pagina 5

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}}(x' + \sqrt{2}y' - \sqrt{3}z')$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2x' - \sqrt{2}y')$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{6}}(x' + \sqrt{2}y' + \sqrt{3}z')$$

$$S: 8x'^2 + 5y'^2 - \frac{4}{\sqrt{6}}(x' + \sqrt{2}y' - \sqrt{3}z') + \frac{8}{\sqrt{6}}(-2x' - \sqrt{2}y') +$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{6}}(x' + \sqrt{2}y' + \sqrt{3}z') = 0$$

$$8x'^2 + 5y'^2 - \cancel{\frac{4}{\sqrt{6}}} - \cancel{\frac{4}{\sqrt{3}}y'} - \cancel{\frac{4}{\sqrt{2}}z'} - \frac{16}{\sqrt{6}}x' - \cancel{\frac{8}{\sqrt{3}}y'} + \cancel{\frac{4}{\sqrt{6}}} + \cancel{\frac{4}{\sqrt{3}}y'} + \cancel{\frac{4}{\sqrt{2}}z'} = 0$$

Geometrie 30:

11.2.3 s

Gafencu

G-30

Pe laturile AB, DC, AD, BC ale tetraedrului $ABCD$ se iau punctele variabile M, N, P, Q respectiv, astfel ca

$$\frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC} = x, \quad \frac{AP}{AD} = \frac{BQ}{BC} = y, \quad x, y \in [0,1].$$

a) Să se arate că punctele M, N, P, Q sunt coplanare.

b) Să se arate că dreptele MN, $x \in [0,1]$ generează aceeași suprafață ca dreptele PQ, $y \in [0,1]$.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA, TI - RB, an 1, seria A 18/01/2021)	Nume și prenume Tivadar Maria Simona	Anul de studii 1	Grupa 30213	Pagina 2

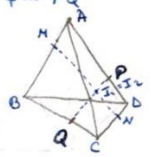
G-26

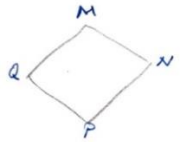
Pe laturile AB, DC, AD, BC ale tetraedrului ABCD se iau punctele variabile M, N, P, Q a.î.

$\frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC} = x$ și $\frac{AP}{AD} = \frac{BQ}{BC} = y$

a) Dem M, N, P, Q - coplanare

b) Dem MN, $x \in [0,1]$ generează aceeași suprafață ca dreptele PQ





a) A demonstra că pct M, N, P, Q sunt coplanare este echivalent cu a dem. că vectorii $\vec{MN}$, $\vec{NP}$, $\vec{PQ}$ - coplanari

$\vec{r}_M = (1-x)\vec{r}_A + x \cdot \vec{r}_B$

$\vec{r}_N = (1-x)\vec{r}_D + x \cdot \vec{r}_C$

$\vec{r}_P = (1-y)\vec{r}_A + y \cdot \vec{r}_D$

Pct $I_1 \in MN$ și $\frac{MI_1}{MN} = y \Rightarrow \vec{r}_{I_1} = \cancel{(1-y)\vec{r}_M} + \cancel{y \cdot \vec{r}_M}$

$\Rightarrow \vec{r}_{I_1} = (1-y)\vec{r}_M + y \cdot \vec{r}_N = (1-y)(1-x)\vec{r}_A + (1-y)x \cdot \vec{r}_B + xy\vec{r}_C + y(1-x)\vec{r}_D$

și $I_2 \in PQ$ $\frac{I_2Q}{QP} = x \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{r}_{I_2} = (1-x)\vec{r}_A + x \cdot \vec{r}_P$ care mai departe $\vec{r}_{I_2} = \vec{r}_Z$

$\Rightarrow I_1 = I_2 \Rightarrow MN \cap QP = \{I\}$

Analog se demonstrează că $NP \cap PQ = \{I_2\}$

$\Rightarrow \vec{MN}, \vec{NP}, \vec{PQ}$ - vectori coplanari

deci M, N, P, Q - puncte coplanare

Pt răspunsul b)

Dreptele MN și PQ generează suprafața pe care se află punctul $I = I_1 = I_2$ și ecuația ei este: $S: F(x,y) = (1-x)(1-y) \cdot \vec{r}_A + x(1-y) \cdot \vec{r}_B + xy\vec{r}_C + (1-x)y\vec{r}_D$

$x, y \in [0,1]$

unde $\{I_1\} = \{I_2\} = MN \cap PQ$

M1:

M-1

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A \cdot B - B \cdot A = A$. Să se arate că $\mathrm{Tr}A = 0$ și $\det A = 0$.

M2

M-2

Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ notăm puterile ei $A^k = [a_{ij}^{(k)}]_{i,j=\overline{1,n}}$.
Să se arate că dacă $a_{11}^{(k)} = 0$ pentru orice $k = \overline{1,n}$, atunci $\det A = 0$.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Bramet Tudor-Andrei	I	4	3

③ Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, not puterile ei $A^k = [a_{ij}^{(k)}]_{i,j=\overline{1,n}}$.
Să se arate că dacă $a_{11}^{(k)} = 0$ pt $\forall k = \overline{1,n} \Rightarrow \det A = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ \cdots & \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ \cdots & \end{bmatrix}, \ldots$$

Teorema Cailey-Hamilton:

$$A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \sigma_2 A^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} A + (-1)^n \sigma_n I_n = 0$$

σ_k = suma minorilor diagonali de ordin k din matrice

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{Tr} A, \quad \sigma_n = \det A$$

Reținem din cele n^2 egalități numerice doar cea de pe poz 11.

$$\underset{\overset{\|}{0}}{a_{11}^{(n)}} - \sigma_1 \underset{\overset{\|}{0}}{a_{11}^{(n-1)}} + \sigma_2 \underset{\overset{\|}{0}}{a_{11}^{(n-2)}} - \ldots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} \underset{\overset{\|}{0}}{a_{11}^{(1)}} + (-1)\sigma_n \cdot 1 = 0$$

$\Rightarrow a_n = 0$ deci $\underline{\det A = 0}$ q.e.d

M3

M-3

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. Să se arate că matricele $A \cdot B$ și $B \cdot A$ au aceleași valori proprii nenule.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA, T1 - rs, an 1, seria A) 18/01/2021	Numele și prenumele Tivadar Maria Simona	Anul de studii 1	Grupa 30213	Pagina 3

M30

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$

Să se arate că matricele $A \cdot B$ și $B \cdot A$ au aceleași valori proprii nenule

Vom considera $f_{AB}(x) \to$ polinomul caracteristic al matricei $A \cdot B$ și $f_{BA}(x) \to$ polinomul caracteristic al matricei $B \cdot A$

Demonstrez că între polinoamele caracteristice f_{AB} și f_{BA} există relația $x^n \cdot f_{AB}(x) = x^m \cdot f_{BA}(x)$

Se verifică astfel înmulțirea matricei pe blocuri

$$\left[\begin{array}{c|c} x \cdot I_m - A \cdot B & A \\ \hline 0 & x \cdot I_n \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline B & I_n \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline B & I_n \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} x I_m & A \\ \hline 0 & x I_n - BA \end{array}\right]$$

Trec la det. cu regula lui Laplace $\Rightarrow$

$$\det(x \cdot I_m - AB) \cdot \det(x \cdot I_n) = \det(x \cdot I_m) \cdot \det(x \cdot I_n - BA)$$

$$\Rightarrow x^m (-1)^m \cdot \underbrace{\det(A \cdot B - x \cdot I_m)}_{f_{AB}} = x^n (-1)^n \underbrace{\det(BA - x I_n)}_{f_{BA}}$$

$\Rightarrow x^m \cdot f_{AB}(x) = x^n \cdot f_{BA}(x)$ Adevărat

Din relația demonstrată $\Rightarrow \lambda_1^m = \lambda_2^n$ dar $\lambda_1 \neq 0$ și $\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, astfel $\Rightarrow$ matricele AB și BA au aceleași valori proprii

M4

M-4

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice de rang k. Să se arate că există matricele coloane nenule $C_1, C_2, \ldots, C_k$ și matricele linii nenule $L_1, L_2, \ldots, L_k$ astfel ca

$$A = C_1 \cdot L_1 + C_2 \cdot L_2 + \ldots + C_k \cdot L_k.$$

M

5. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice de rang k. Să se arate că există matricele coloană nenule $C_1, C_2, \dots, C_k$ și matricele linii nenule $L_1, L_2 \dots L_k$ a.î. $A = C_1 \cdot L_1 + C_2 \cdot L_2 + \dots + C_k \cdot L_k$

$$A = C \cdot L = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \cdot [b_1 \ b_2 \ b_3 \dots b_m]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_m \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_m \\ \vdots & & & \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \dots & a_m b_m \end{bmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \Rightarrow$ prin transformări elementare $\left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = \text{rang } A = k$

Fie B, C matrice inversabile, $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ și $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$A_m = B \cdot A \cdot C$

$A \approx A_m$

$$A_m = \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [1 \ 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 1 \ 0] + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} [0 \dots 1 \dots 0]$$

$A_2 = B \cdot A \cdot C$

$A = B^{-1} \cdot A_m \cdot C^{-1}$

$A = B^{-1}(C_1 \cdot L_1 + C_2 \cdot L_2 + \dots + C_k \cdot L_k) \cdot C^{-1}$

$A = (B^{-1} \cdot C_1)(L_1 \cdot C^{-1}) + (B^{-1} \cdot C_2)(L_2 \cdot C^{-1}) + \dots$

$+ (B^{-1} \cdot C_k)(C^{-1} \cdot L_k)$

$\Leftrightarrow A = C_1 \cdot L_1 + C_2 \cdot L_2 + \dots + C_k \cdot L_k$

M5

M-5

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $\text{Tr}(A^k) = 1$, $k = \overline{1, n}$. Să se arate că $A^n = A^{n-1}$.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	FAGE SEBASTIAN-GEORGE	1	30214	10

M10) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $\text{Tr}(A^k) = 1$, $k = \overline{1,n}$. Să se arate că $A^n = A^{n-1}$

Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei A, atunci $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ sunt valorile proprii ale matricei A^2 și $\lambda_1^{n-1}, \lambda_2^{n-1}, \dots, \lambda_n^{n-1}$ sunt valorile proprii ale lui A^{n-1}.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = 1 \\ \dots \\ \lambda_1^{n-1} + \lambda_2^{n-1} + \dots + \lambda_n^{n-1} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \dots + k_p\lambda_p = 1 \\ k_1\lambda_1^2 + k_2\lambda_2^2 + \dots + k_p\lambda_p^2 = 1 \\ \dots \\ k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2^n + \dots + k_p\lambda_p^n = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \neq 1$

$\Rightarrow k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2 = \dots = k_p\lambda_p = 1$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 1$

$\Rightarrow A^n = A^{n-1}$

M6

M-6

Fie $M = \left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ o matrice cu blocuri, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Să se arate că între polinoamele caracteristice există relația $f_M = f_{A+iB} \cdot f_{A-iB}$, în particular $\det M \geq 0$.

EXAMEN	NUME ȘI PRENUME	ANUL DE STUDII	GRUPA	PAGINA
Algebră liniară și geometrie analitică (C4, TI-RO, an1, seria A) 18/01/2021	MEZE RĂZVAN	1	30212	2

3. (Matrici)

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right]$$

$$\det M = \det\left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right] \overset{L_1+iL_2}{=} \det\left[\begin{array}{c|c} A+iB & +Ai-B \\ \hline B & A \end{array}\right] =$$

$$\overset{C_2-iC_1}{=} \det\left[\begin{array}{c|c} A+iB & 0 \\ \hline B & A-iB \end{array}\right] = \det[A+iB] \cdot \det[A-iB] =$$

$$= \det[A+iB] \cdot \det[\overline{A+iB}] = \det[A+iB] \cdot \overline{\det[A+iB]} =$$

$$= |\det[A+iB]|^2 \geq 0$$

$$f_M = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + \ldots + (-1)^n \sigma_n$$

σ_k - suma minorilor diagonali de ordin k

$$\sigma_n = \det[A+iB] \cdot \det[A-iB]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} A+iB & 0 \\ \hline B & A-iB \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ a.î. } \left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right] = Q \cdot \left[\begin{array}{c|c} A+iB & 0 \\ \hline B & A-iB \end{array}\right] \cdot P$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} A+iB & 0 \\ \hline B & A-iB \end{array}\right]$$ au aceleași valori proprii (echivalente)

$$f_M = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\ldots(X-\lambda_n)$$

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A+iB & 0 \\ \hline B & A-iB \end{array}\right]$$

$$f_C = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\ldots(X-\lambda_n)$$

$$f_M = f_C = f_{A+iB} \cdot f_{A-iB}$$

M7

M-7

Fie $M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ o matrice cu blocuri, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Să se arate că între polinoamele caracteristice există relația $f_M = f_{A+B} \cdot f_{A-B}$.

M8

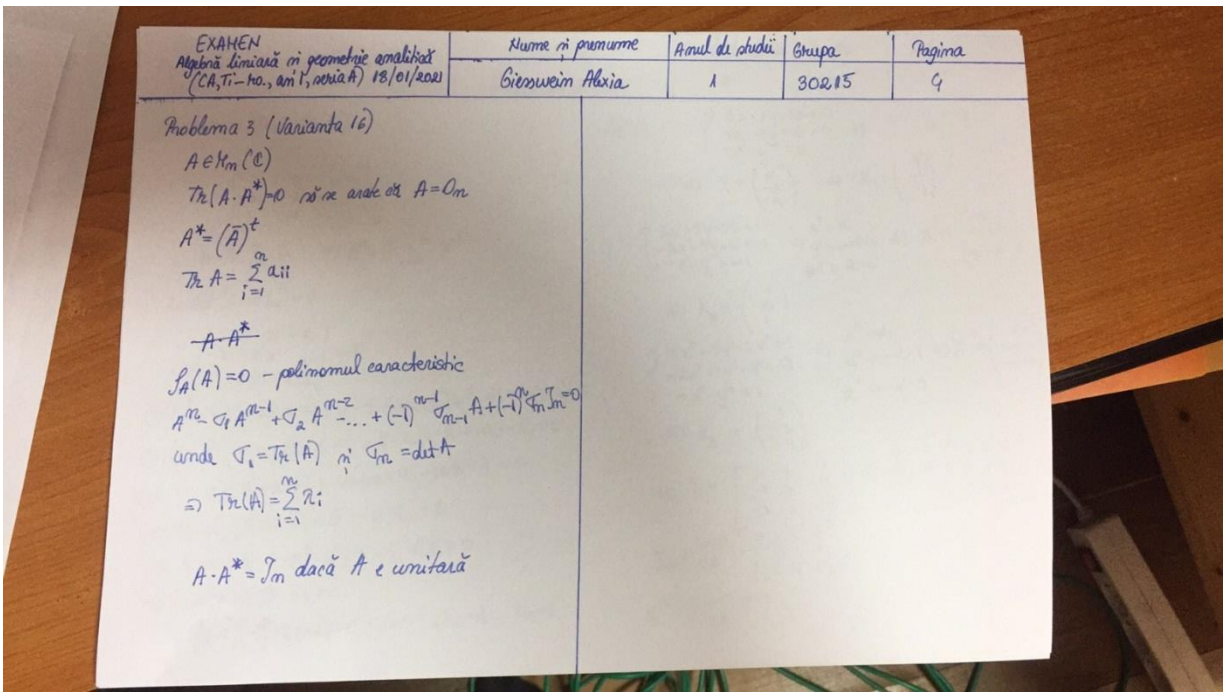
M-8

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice de rang k. Să se arate că există două matrice de rang k, $B \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{C})$ și $C \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{C})$ astfel ca $A = B \cdot C$.

M9

M-9

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $\mathrm{Tr}(A \cdot A^*) = 0$. Să se arate că $A = O_n$.



EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA, Ti – ro., an I, seria A) 18/01/2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Giessweim Alexia	1	302/15	4

Problema 3 (Varianta 16)

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$Tr(A \cdot A^*) = 0$ să se arate că $A = O_n$

$A^* = (\bar{A})^t$

$Tr\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

~~$A \cdot A^*$~~

$f_A(A) = 0$ – polinomul caracteristic

$A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \sigma_2 A^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} A + (-1)^n \sigma_n I_n = 0$

unde $\sigma_1 = Tr(A)$ și $\sigma_n = \det A$

$\Rightarrow Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

$A \cdot A^* = I_n$ dacă A e unitară

M10

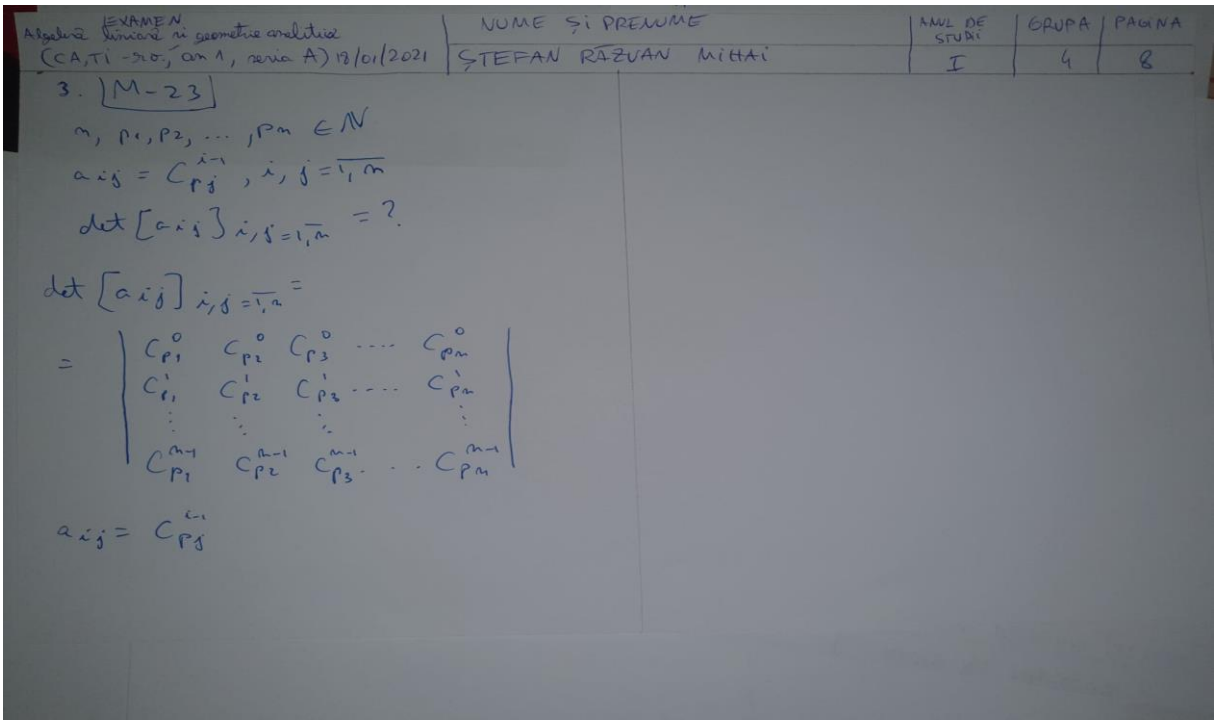
M-10

Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $\det(A + kB) = \det(C + kD)$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$. Să se arate că $\det(A + zB) = \det(C + zD)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

M11

M-11

Fie $n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ numere naturale și $a_{ij} = C_{p_j}^{i-1}$, $i, j = \overline{1, n}$.
Să se calculeze $\det[a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$.



EXAMEN
Algebră liniară și geometrie analitică
(CA, TI - RO, an 1, seria A) 18/01/2021

NUME ȘI PRENUME	ANUL DE STUDII	GRUPA	PAGINA
ȘTEFAN RĂZVAN MIHAI	I	4	8

3. $\boxed{M-23}$

$n, p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$

$a_{ij} = C_{p_j}^{i-1}$, $i, j = \overline{1, n}$

$\det[a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}} = ?$

$\det[a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}} =$

$$= \begin{vmatrix} C_{p_1}^{0} & C_{p_2}^{0} & C_{p_3}^{0} & \cdots & C_{p_n}^{0} \\ C_{p_1}^{1} & C_{p_2}^{1} & C_{p_3}^{1} & \cdots & C_{p_n}^{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{p_1}^{n-1} & C_{p_2}^{n-1} & C_{p_3}^{n-1} & \cdots & C_{p_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

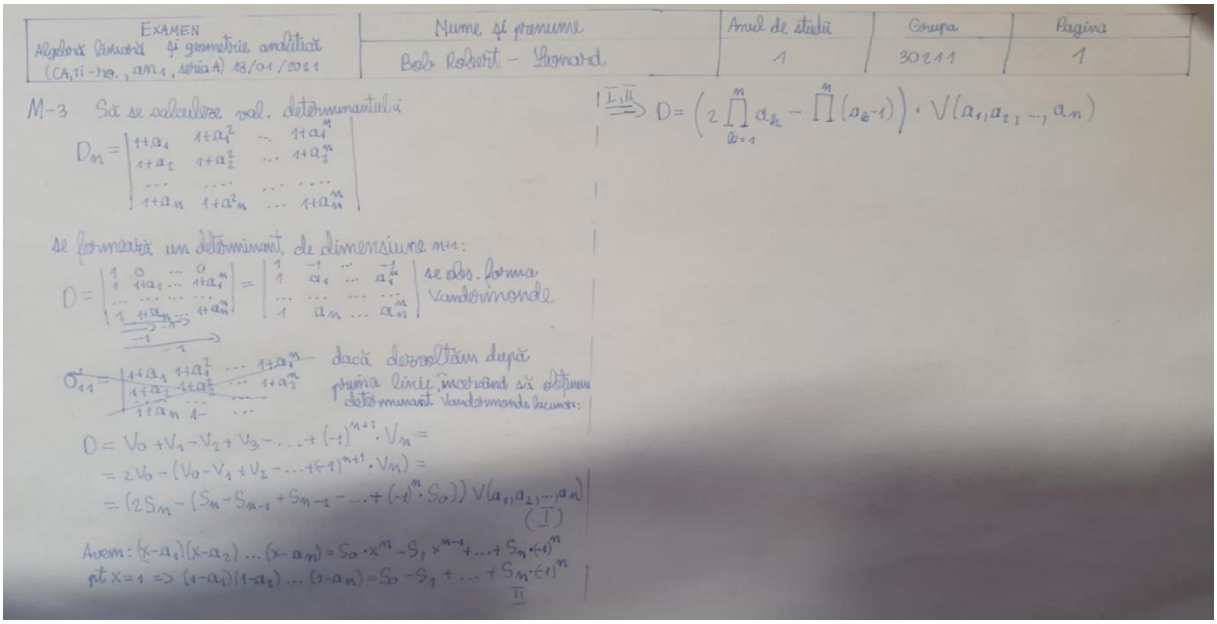
$a_{ij} = C_{p_j}^{i-1}$

M12

M-12

Să se calculeze valoarea determinatului

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+a_1^2 & \ldots & 1+a_1^n \\ 1+a_2 & 1+a_2^2 & \ldots & 1+a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1+a_n & 1+a_n^2 & \ldots & 1+a_n^n \end{vmatrix}.$$



EXAMEN	Nume și prenume	Anul de studiu	Grupa	Pagina
Algebră liniară și geometrie analitică (CA, TI-ro., AM1, seria A) 18/01/2021	Bolr Robert - Leonard	1	30211	1

M-3 Să se calculeze val. determinantului

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+a_1^2 & \dots & 1+a_1^n \\ 1+a_2 & 1+a_2^2 & \dots & 1+a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+a_n & 1+a_n^2 & \dots & 1+a_n^n \end{vmatrix}$$

se formează un determinant de dimensiune n+1:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1+a_1 & \dots & 1+a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1+a_n & \dots & 1+a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$ se obs. forma Vandermonde

$$\cancel{\sigma_{11}^1 = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+a_1^2 & \dots & 1+a_1^n \\ 1+a_2 & 1+a_2^2 & \dots & 1+a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+a_n & 1+ & \dots & \end{vmatrix}}$$ dacă dezvoltăm după prima linie, înmulțind și obținem determinant Vandermonde bucăți:

$$D = V_0 + V_1 - V_2 + V_3 - \dots + (-1)^{n+1} \cdot V_n =$$
$$= 2V_0 - (V_0 - V_1 + V_2 - \dots + (-1)^{n+1} \cdot V_n) =$$
$$= (2S_n - (S_n - S_{n-1} + S_{n-2} - \dots + (-1)^n \cdot S_0)) V(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (I)$$

Avem: $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) = S_0 \cdot x^n - S_1 x^{n-1} + \dots + S_n \cdot (-1)^n$

pt $x=1 \Rightarrow (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) = S_0 - S_1 + \dots + S_n \cdot (-1)^n$ (II)

$$\overset{I,II}{\Longrightarrow} D = \left(2\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n}(a_k - 1)\right) \cdot V(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

M13

M-13

Fie $A = B + iC \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă cu $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și fie

$$A^{-1} = D + iE, \text{ cu } D, E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Să se arate că matricea $M = \left[\begin{array}{c|c} B & -C \\ \hline C & B \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ este inversabilă și $M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} D & -E \\ \hline E & D \end{array}\right]$.

M14

M-14

Să se calculeze valoarea determinatului circular $C(C_n^1, 2aC_n^2, 3a^2C_n^3, \dots, na^{n-1}C_n^n)$.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	VIȘA DANIEL NICOLAE	1	DOM3	5

M.14. Să se calculeze valoarea determinantul circular $C(C_n^1, 2a\, C_n^2, 3a^2 C_n^3, \dots, na^{n-1} C_n^n)$

$C(C_n^1, 2a\, C_n^2, 3a^2 C_n^2, \dots, na^{n-1} C_n^n) =$

$= \prod_{k=0}^{n-1} P(\varepsilon_k)$, unde ε_k răd. ec. $x^n = 1$.

Notăm $ax = y \Rightarrow$

$\Rightarrow P(y) = C_n^1 + 2C_n^2 y + \dots + n C_n^n y^{n-1} =$

$= (1 + C_n^1 y + C_n^2 y^2 + \dots + C_n^n y^n)' =$

$= [(1+y)^n]' = n(1+y)^{n-1}$

$\Rightarrow P(x) = n(1+ax)^{n-1}$

$P(\varepsilon_k) = n(1+a\varepsilon_k)^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det C = \prod_{k=0}^{n-1} P(\varepsilon_k) = \prod_{k=0}^{n-1} n(1+a\varepsilon_k)^{n-1}$

$= n^n \left[\prod_{k=1}^{n} (a\varepsilon_k + 1)\right]^{n-1}.$

M15

M-15

Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai unei matrice circulare

$$C[\ a_1, a_2, \dots, a_n\ ].$$

M16

M-16

Să se calculeze valoarea determinantului circular

$$C(1, 2a, 3a^2, \dots, na^{n-1}),\ a \in \mathbb{R}^*.$$

M17

M-17

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A \cdot B + A + B = 0$.
Să se arate că $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$ și $A \cdot B = B \cdot A$.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU-ro, an 1, seria A) 22/01/2021	Numele și prenumele	Anul de studii	Grupa	Pagina
	ILCA ANDREA IULIANA	1	30113	5

M-17

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a.î. $A \cdot B + A + B = 0$

Să se arate că $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$ și $A \cdot B = B \cdot A$

Se știe că $x, y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$\operatorname{rang}(x \cdot y) \leq \min(\operatorname{rang} x, \operatorname{rang} y)$

Fie E matricea unitate din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = A \cdot B + A + B = A \cdot B + A \cdot E + B = A(B+E) + B$, deci

$B = -A(B+E) = A(-B-E)$

$\Rightarrow \operatorname{rang} B = \operatorname{rang}[A(-B-E)] \leq \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang}(-B-E))$

$\leq \operatorname{rang} A$

Analog deducem că $\operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang} B \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$

Din $A \cdot B + A + B = 0$ avem $AB + A + B + E = E \Leftrightarrow$

$A(B+E) + (B+E) = E \Leftrightarrow (A+E)(B+E) = E$

Adică $B + E = (A+E)^{-1} \Rightarrow (A+E)^{-1}(A+E) = E \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (B+E)(A+E) = E \Leftrightarrow BA + B + A + E = E \Rightarrow BA = -B - A$

Dar $AB = -B - A$

$\Rightarrow BA = -B - A = AB \Rightarrow BA = A \cdot B$ q.e.d.

M18

M-18

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $A^2 + B^2 = \sqrt{3}(AB - BA)$.
Să se arate că dacă $\det(A^2 + B^2) \neq 0$, atunci n este multiplu de 6.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	RACHERIU NICOLAE	1	30113	3

M-18) $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$A^2+B^2 = \sqrt{3}(AB-BA)$, $\det(A^2+B^2) \neq 0$

Arăt. că $n \in \mathcal{M}_6$

$(A-iB)(A+iB) = A^2+B^2 - i(AB-BA) = \sqrt{3}(AB-BA) - i(AB-BA)$

$\Rightarrow (A-iB)(A+iB) = (\sqrt{3}-i)(AB-BA)$

$\det(A-iB)(A+iB) = \det(A+iB) \cdot \det\overline{(A+iB)} = \det(A+iB) \cdot \det\overline{(A+iB)} = |\det(A+iB)|^2$

$\Rightarrow \det(A-iB)(A+iB) \in \mathbb{R} \Rightarrow \det(\sqrt{3}-i)(AB-BA) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\sqrt{3}-i)^n \cdot \det(AB-BA) \in \mathbb{R} \Rightarrow (\sqrt{3}-i)^n \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \left(2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right)^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right)^n \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 2^n\left(\cos\frac{11n\pi}{6} + i\sin\frac{11n\pi}{6}\right) \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin\frac{11n\pi}{6} = 0$

$\Rightarrow \frac{11n\pi}{6} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \mathcal{M}_6$

M19

M-19

Fie $C = [\ c_1, c_2, \ldots, c_n\ ]^t$ o matrice coloană și $L = [\ l_1, l_2, \ldots, l_n\ ]$ o matrice linie. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii pentru matricea $A = C \cdot L$.

M20

M-20

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu toate valorile proprii de modul mai mic decât 1.
Să se arate că $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$.

M21

M-21

Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, notăm puterile ei $A^k = [a_{ij}^{(k)}]_{i,j=\overline{1,n}}$.
Să se arate că dacă $a_{12}^{(k)} = 0$ pentru orice $k = \overline{1,n}$, atunci $a_{12}^{(k)} = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

M22

M-22

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $A^2 + B^2 = e(AB - BA)$. Să se arate că $\det(A^2 + B^2) = 0$.

M23

M-23

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$, $k = \overline{1, n}$. Să se arate că $A^n = 0$.

M24

M-24

Să se calculeze valoarea determinatului circular

$$C(C_{n-1}^0, aC_{n-1}^1, a^2C_{n-1}^2, \ldots, a^{n-1}C_{n-1}^{n-1}),\ a \in \mathbb{R}.$$

M25

M-25

Folosind dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x) = e^x$, să se calculeze valoarea determinatului

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{1}{1!} & 1 \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}.$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Mătieș Zorina - Mihaela	1	30211	3

3) M-17) Folosind dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x) = e^x$ să se calculeze valoarea det:

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{1}{1!} & 1 \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{1!} \\ \frac{1}{1!}a_1 - a_2 = \frac{1}{2!} \\ \frac{1}{2!}a_1 - \frac{1}{1!}a_2 + a_3 = \frac{1}{3!} \\ \ldots \\ \frac{1}{(n-1)!}a_1 - \frac{1}{(n-2)!}a_2 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n = \frac{1}{n!} \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul cu metoda Gramer:

$$a_n = \frac{D_n}{D} \Rightarrow D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$D = (-1)^{\frac{n(n-2)}{2}} \cdot D_n$$

$$\Rightarrow D_n = \frac{D}{(-1)^{\frac{n(n-2)}{2}}}$$

M26

M-26

Să se calculeze valoarea determinantului circular $C(1, a, a^2, \ldots, a^{n-1})$.

M27

M-27

Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu A inversabilă și $M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$.

Să se arate că $\det M = \det A \cdot \det(D - C \cdot A^{-1} \cdot B)$.

M28

M-28

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $B = A \cdot A^*$, $B = [b_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$.

Să se arate că dacă $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} = 0$, atunci $\det A = 0$.

M29

M-29

Să se determine valorile proprii și vectorii proprii pentru matricea circulară

$$C\left[\ 0, 1, 0, \ldots, 0, -1\ \right].$$

M30

M-30

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$ numere reale pozitive și $a_{ij} = \dfrac{1 - a_i^n \cdot b_j^n}{1 - a_i \cdot b_j}$.

Să se calculeze $\det[a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	TRIFU RARES ALEXANDRU	1	30112	1

1) M-30

Fie $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ numere reale pozitive și $a_{ij} = \frac{1 - a_i^n \cdot b_j^n}{1 - a_i \cdot b_j}$. Să se calculeze

$\det [a_{ij}]_{ij = \overline{1,n}}$

$$a_{ij} = \frac{1 - a_i^n \cdot b_j^n}{1 - a_i \cdot b_j} = 1 + a_i \cdot b_j + a_i^2 \cdot b_j^2 + \dots + a_i^{n-1} \cdot b_j^{n-1}$$

Fie $P(X) = 1 + a_i X + a_i^2 \cdot X^2 + \dots + a_i^{n-1} \cdot X^{n-1}$

$\Rightarrow a_{ij} = P_i(b_j)$

Determinantul cerut este un determinant polinomial

$gr\, P_i \leq n-1$

$\Delta = \det P \cdot V(b_1, \dots, b_n)$ (1)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\det P = V(a_1, \dots, a_n)$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \det \Delta = V(a_1, \dots, a_n) \cdot V(b_1, \dots, b_n)$

JORDAN

J1

J-1

Să se reducă la formă canonică Jordan matricea:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}^*.$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA, TI-RO, an 1, seria A) 18/01/2021	Numele și prenumele Tivadar Maria Simona	Anul de studii	Grupa 302/3	Pagina 4

J8 Să se reducă la formă canonică Jordan matricea (nu se cere altceva)

$A = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ $a \in \mathbb{R}^*$

fie $\lambda \in \mathbb{R}$ a.î. $\det(A - \lambda \cdot I_3) = 0$

$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & a \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 \\ 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^3$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = a \Rightarrow n = 3$

$\lambda_3 = a$

$\Rightarrow a \cdot x_3 = 0$

$x_3 = 0$ și $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

fie $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ $\Rightarrow X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$

$X = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow d = 2$

din $n = 3$, $d = 2$ $\Rightarrow$ vom avea $n - d = 1$ vector auxiliar

verific dacă sistemul e compatibil

$a \cdot x_2 = \alpha$

$0 = \beta$

$\begin{vmatrix} a & \alpha \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta = 0$

alg convenabil $\alpha = 1$

$\Rightarrow a \cdot x_3' = 1$

$x_3' = \frac{1}{a}$

$X' = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \frac{1}{a} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a} \end{bmatrix}$

$x_1', x_2' \in \mathbb{R}$ fie $x_1' = \alpha'$, $x_2' = \beta'$

din cele calculate $\Rightarrow$

$J_A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$

J2

J-2

Să se determine $\ln A$ și e^{A-I_3}.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 10 \\ -4 & 2 & 7 \\ -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

(5) Să se determine $\ln A$ și e^{A-I_3}. $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 10 \\ -4 & 2 & 7 \\ -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

$= \mathbb{R} =$

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B + I_3$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O_3$$

$\Rightarrow B^n = O_3, \ \forall n \geq 3$

$$\ln A = \ln(I_3 + B) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot B^n = \frac{(-1)^{1+1}}{1} \cdot B + \frac{(-1)^{1+2}}{2} B^2 =$$

$$= B - \frac{1}{2} B^2 = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \cancel{\begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 \\ -\frac{7}{2} & 1 & 6 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 4 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 8 \\ -\frac{7}{2} & 1 & 6 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$A = B + I_3 \Rightarrow B = A - I_3$

$\Rightarrow e^{A - I_3} = e^B$

$\det(B - \lambda I_3) = 0$

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 2 & 10 \\ -4 & 1-\lambda & 7 \\ -3 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-6-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda) - 40 - 42 + 30(1-\lambda) - 7(-6-\lambda) + 8(5-\lambda) = \dots = -\lambda^3$$

$\det(B - \lambda I_3) = 0 \iff -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ n_1 = 3$

$\lambda = 0 \Rightarrow BX = O_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 4x_1 - 7x_3 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} -3x_1 + 4x_1 - 7x_3 + 5x_3 = 0 \iff x_1 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_3$

$x_2 = x_3$

$x_{2,3} = \alpha \Rightarrow x_1 = 2\alpha \quad \Rightarrow d_1 = 1 < n_1 = 3$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Trebuie să construim 2 vectori auxiliari după schema $X_1 \to X_2' \to X_3''$

$BX_2' = X_1$

$$\iff \begin{aligned} &-6x_1' + 2x_2' + 10x_3' = 2 \\ &-4x_1' + x_2' + 7x_3' = 1 \Rightarrow x_2 = 1 + 4x_1 - 7x_3 \\ &-3x_1' + x_2' + 5x_3' = 1 \end{aligned}$$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} -3x_1' + 1 + 4x_1' - 7x_3' + 5x_3' = 1 \iff x_1' - 2x_3' = 0 \Rightarrow x_1' = 2x_3'$

$x_2' = x_3' + 1$

$$\Rightarrow X' = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha+1 \\ \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow X_2' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow S'' : \begin{cases} -6x_1'' + 2x_2'' + 10x_3'' = 2 \\ -4x_1'' + x_2'' + 7x_3'' = 2 \Rightarrow x_2'' = 2 + 4x_1'' - 7x_3'' \\ -3x_1'' + x_2'' + 5x_3'' = 1 \end{cases}$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} -3x_1'' + 2 + 4x_1'' - 7x_3'' + 5x_3'' = 1 \Leftrightarrow x_1'' - 2x_3'' + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1'' = 1 + 2x_3''$$

$$x_2'' = 2 + 4 + 8x_3'' - 7x_3'' = 6 + x_3''$$

$$\text{Pt } x_3'' = \alpha \Rightarrow X' = \begin{bmatrix} 1+2\alpha \\ 6+\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow X_3'' = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ x_1 \quad x_2' \quad x_3'' \end{array} \qquad J_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -8 \\ -6 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{f(A) = P \cdot f(J_A) \cdot P^{-1}}$$

$$\Rightarrow \cancel{\ln(A) = P \cdot \ln(J_A) \cdot P^{-1}}$$

$$\cancel{\ln(J_A) = \begin{bmatrix} \ln 1 & \ln' 1 & \frac{1}{2}\ln'' 1 \\ 0 & \ln 1 & \ln' 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{B} = P \cdot e^{J_B} \cdot P^{-1}$$

$$e^{J_B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -1 & -8 \\ -6 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & \frac{19}{2} \\ 1 & 2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -1 & -8 \\ -6 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -28 & 2 & 16 \\ \frac{-27}{2} & 2 & 6 \\ -\frac{29}{2} & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

J3

J-3

Să se arate că există două matrice $B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel ca $A^n = 2^n \cdot B + 3^n \cdot C$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(12) Să se arate că $\exists$ 2 matrice $B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ a.î.

$A^n = 2^n \cdot B + 3^n \cdot C$, pt. orice $n \in \mathbb{N}$, unde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$= \mathbb{R} =$

$\det(A - \lambda I_3) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & -2 \\ -(2-\lambda) & 2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & -2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{L_3 + L_1}{=} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left[(4-\lambda)(1-\lambda) + 2\right] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) =$$

$$= (2-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$$

$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ n_1 = 2$

$3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 3,\ n_2 = 1$

$= h =$

$\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 2}$: $(A - \lambda I_3) = O_3 \iff (A - 2I_3)\, X = O_3$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Sistemul se reduce la ecuația:

$x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$\Rightarrow x_3 = x_2 - x_1$

$x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta \Rightarrow x_3 = \beta - \alpha$

$$X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta - \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow d_1 = 2$$

$\left.\begin{matrix} m_1 = 2 \\ d_1 = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $d_1 = 2$ vectori proprii

$m_1 - d_1 = 0$ vectori auxiliari

$$\begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{matrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{matrix} \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_3 = 3}$: $(A - 3I_3)\, X = O_3$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 & \Rightarrow x_2 = x_3 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 & \Rightarrow -2x_1 + x_2 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = \alpha \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}\alpha$, $x_3 = -\frac{1}{2}\alpha$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\frac{1}{2}\alpha \\ -\frac{1}{2}\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow d = 1$$

$m_2 = 1$
$d_2 = 1$ $\Rightarrow$ 1 vector propriu

$\alpha_1 = 2 \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow P = [X_1 \mid X_2 \mid X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J_A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^n = P \cdot J_A^n \cdot P^{-1}$$

$$J_A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = [P \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_3+L_1}{=}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_3-L_2}{=} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] =$$

$$\overset{L_1-L_3}{=} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{L_2+\frac{1}{2}L_3}{=} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] =$$

$$\overset{\frac{1}{2}L_3}{=} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 2\cdot 3^n \\ 0 & 2^n & -3^n \\ -2^n & 2^n & -3^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 2\cdot 3^n \\ 0 & 2^n & -3^n \\ -2^n & 2^n & -3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2^n + 2\cdot 3^n & -2\cdot 3^n & 2\cdot 3^n \\ 2^n - 3^n & 2^n + 3^n & 2^n - 3^n \\ \cancel{-2^n} + \cancel{2^n} - 3^n & 2^n + 3^n & 2^n - 3^n \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 2^n & 2^n & 2^n \\ 0 & 2^n & 2^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cdot 3^n & -2\cdot 3^n & 2\cdot 3^n \\ -3^n & 3^n & -3^n \\ -3^n & 3^n & -3^n \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(3^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 3^n \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= 2^n \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{A} + 3^n \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{B}$$

J-4

Să se determine forma canonică Jordan, forma canonică reală și matricele de pasaj pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 7 \\ 1 & -3 & 9 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

$(X-Y+Z-3)$

$$\left(\frac{-X-2Y+2Z}{X-Y+Z-3}\right)^2 + 2\left(\frac{X-4Y+Z-6}{X-Y+Z-3}\right)^2 + \left(\frac{-3Z}{X-Y+Z-3}\right)^2 = 1 \quad \Big| \cdot (X-Y+Z-3)^2$$

$$\underbrace{(-X-2Y+2Z)^2 + 2(X-4Y+Z-6)^2 + (-3Z)^2 = (X-Y+Z-3)^2}_{\text{suprafața conică căutată!}}$$

J-19 Să se det. forma canonică Jordan, forma canonică reală și matricele de pasaj pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 7 \\ 1 & -3 & 9 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

P1) $$|A-\lambda I_3| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -3-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} \overset{\leftarrow +}{} = \begin{vmatrix} -\lambda & -5 & 7 \\ -2-\lambda & -3-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} \uparrow + =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -2+\lambda & -2 \\ -2-\lambda & -3-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} \downarrow +(-2) = \begin{vmatrix} 2 & -2+\lambda & -2 \\ -2-\lambda & -3-\lambda & 9 \\ 0 & -4+2\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\leftarrow +\ \cdot 2}{}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -6+\lambda & -2 \\ -2-\lambda & 15-\lambda & 9 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(12+4\lambda-\lambda^2-30+2\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)(-\lambda^2+6\lambda-18) = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 18 = 0$$

$$\Delta = 36 - 72 = -36 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{6 \pm 6i}{2} \Rightarrow \lambda_2 = 3+3i, \quad \lambda_3 = 3-3i$$

$P_2)$ $\lambda_1 = 2$

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 0 \\ -4x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 5x_2 - 9x_3$$

$(1) \Rightarrow 15x_2 - 27x_3 - 5x_2 + 7x_3 = 0$

$10x_2 = 20x_3 \Rightarrow x_2 = 2x_3$

$(3) \Rightarrow -4x_1 + 4x_3 = 0$

$\cancel{-3x_3 = 2x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{3x_3}{2}}$

$4x_3 = 4x_1 \Rightarrow x_3 = x_1$

$X_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ $\quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 3 + 3i$

$$\begin{cases} (2-3i)x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + (-6-3i)x_2 + 9x_3 = 0 \\ -4x_1 + (3-3i)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (3-3i)x_3 = 4x_1$$

$\cancel{x_3 = \frac{4x_1}{3-3i}}$

$x_1 = \frac{(3-3i)x_3}{4}$

$\cancel{(1)\ (2-3i)x_1 - 5x_2 + \frac{28x_1}{3-3i} = 0}$

$\cancel{(-3-15i)x_1 - 15(1-i)x_2 + 28x_1 = 0}$

$\cancel{5(5-3i)x_1 = 15(1-i)x_2}$

$\cancel{x_1 = \frac{3(1-i)x_2}{5-3i}}$

$(1)\ \frac{-3(1-5i)x_3}{4} - 5x_2 + 7x_3 = 0 \quad / \cdot 4$

$(5-15i)x_3 - 20x_2 = 0$

$5(5-3i)x_3 = 20x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{(5-3i)x_3}{4}$

$X_2 = \begin{bmatrix} \frac{(3-3i)\alpha}{4} \\ \frac{(5-3i)\alpha}{4} \\ \alpha \end{bmatrix}$ $\quad X_2 = \begin{bmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = \overline{\lambda_2} \Rightarrow Z_3 = \overline{Z_2}$

$$Z_{2,3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = X_2 \pm i X_3$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3-3i & 3+3i \\ 2 & 5-3i & 5+3i \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$J_A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3+3i & 0 \\ 0 & 0 & 3-3i \end{bmatrix}$$

$$\cancel{P^{(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}} \quad P^{(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{J_A^{(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & & 0 \\ 1 & 0 & \end{bmatrix}} \quad J_A^{(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

J-17 Să se det. funcțiile derivabile $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 2y(t) + 10z(t) \\ y'(t) = -4x(t) + 4y(t) + 7z(t) \\ z'(t) = -3x(t) + y(t) + 8z(t), \quad t \in \mathbb{R}, \ x(0)=1, y(0)=1, z(0)=0 \end{cases}$$

Fie $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 10 \\ -4 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$

$X'(t) = A \cdot X(t)$

J5

J-5

Să se determine forma canonică Jordan, matricea de pasaj și A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

J4. Det. forma canonică Jordan, A^M

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 6 & -3 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{bmatrix} \overset{C_3+C_1}{=} \begin{bmatrix} 4-\lambda & 6 & 1-\lambda \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{bmatrix} 4-\lambda & 6 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_1-L_3}{=} (1-\lambda) \begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(3-\lambda)(-1-\lambda)+4\right] = (1-\lambda)(-3-3\lambda+\lambda+\lambda^2+4) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1) = (1-\lambda)(\lambda-1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$M = 3$$

$$\lambda = 1 \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \end{matrix} \Rightarrow x_3 = \alpha + 2\beta$$

~~cond~~

vector auxiliar

$$\begin{cases} 3x_1' + 6x_2' - 3x_3' = \alpha \\ -x_1' - 2x_2' + x_3' = \beta \\ x_1' + 2x_2' - x_3' = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

condiții de compatibilitate

$\alpha = 3(\alpha + 2\beta) \Rightarrow \alpha = -3\beta$ (A)

$-\beta = \alpha + 2\beta \Rightarrow \alpha = -3\beta$ (A)

$$x_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_2' = \begin{cases} 3x_1' + 6x_2' - 3x_3' = -3 \\ -x_1' - 2x_2' + x_3' = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1' = -2 \\ x_2' = 0 \\ x_3' = -1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x_2' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^M = P \cdot J_A^M \cdot P^{-1}$$

$$J_A^M = \begin{pmatrix} 1^M & M & 0 \\ 0 & 1^M & 0 \\ 0 & 0 & 1^M \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^M = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^M & M & 0 \\ 0 & 1^M & 0 \\ 0 & 0 & 1^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3M-2 & 1 \\ 1 & M & 0 \\ -1 & -M-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3M+1 & 6M & -3M \\ -M & 1-2M & M \\ M & 2M & -M+1 \end{pmatrix}$$

J6

J-6

Să se determine funcțiile derivabile $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) \\ y'(t) = -4x(t) \qquad\quad + z(t) \\ z'(t) = 4x(t) + y(t), \qquad\qquad t \in \mathbb{R},\ x(0) = y(0) = 1,\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Examen Algebră liniară și geometrie analitică (AU - mo, an 1, seria A) 22/01/2021	Nume și Prenume Gaspar Vlad	Anul de Studiu 1	Grupa 30113	Pagina 3

4. J-6

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) \\ y'(t) = -4x(t) \qquad + z(t) \\ z'(t) = 4x(t) + y(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(0) = y(0) = 1, \ z(0) = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A - \lambda I_3) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -\lambda & 1 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -\lambda & 1 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{L_3 + L_2}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[-\lambda(3-\lambda) - (3-\lambda) + 4\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[-3\lambda + \lambda^2 - 3 + \lambda + 4\right] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(1-\lambda)^3$$

Fie $\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow -(1-\lambda)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1,\ m = 3$

I $(A - I_3)X = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

din prima relație $\Rightarrow 2x_1 = -x_2$

$-4x_1 + 2x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow -2x_1 = -x_3 \Rightarrow 2x_1 = x_3$

$$X_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} \overset{\alpha = 1}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

II $(A - I_3)X_1' = X_1$

$$\begin{cases} 2x_1' + x_2' = 1 \\ -4x_1' - x_2' + x_3' = -2 \\ 4x_1' + x_2' - x_3' = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1' + x_2' = 1 \ /\cdot 2 \\ -4x_1' - x_2' + x_3' = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1' + 2x_2' = 2 \\ -4x_1' - x_2' + x_3' = -2 \end{cases} +$$

Examen	Nume și Prenume	Anul de Studii	Grupa	Pagina
Algebră liniară și geometrie analitică (AU-ro, an 1, seria A) 22/01/2021	Gaspar Vlad	1	30113	4

$x_2' + x_3' = 0 \Rightarrow x_2' = -x_3'$

$-4x_1' + x_3' + x_3' = -2 \Leftrightarrow -4x_1' + 2x_3' = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x_1' + x_3' = -1 \Rightarrow x_3' = -1 + 2x_1'$

$$X' = \begin{bmatrix} \frac{1+\alpha}{2} \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \overset{\alpha=1}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

III $(A - I_3)X'' = X'$

$$\begin{cases} 2x_1'' + x_2'' = 1 \\ -4x_1'' - x_2'' + x_3'' = -1 \\ 4x_1'' + x_2'' - x_3'' = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1'' + x_2 = 1 \\ -4x_1'' - x_2'' + x_3'' = -1 \end{cases} + \Rightarrow -2x_1'' + x_3'' = 0 \Rightarrow x_3'' = 2x_1''$$

$-4x_1'' - x_2'' + 2x_1'' = -1 \Leftrightarrow -2x_1'' - x_2'' = -1 \Leftrightarrow$

$2x_1'' + x_2'' = 1 \Leftrightarrow 2x_1'' = 1 - x_2''$

$$X'' = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} \\ 1-\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \overset{\alpha=0}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x(t) = e^{At} \cdot C \qquad e^{At} = P \cdot e^{J_A \cdot t} \cdot P^{-1}$

P^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Examen	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
Algebră liniară și geometrie analitică (AU-ro, an 1, seria A) 22/01/2021	Gaspar Vlad	1	30113	5

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t + te^t \\ 2e^t & 2te^t & -e^t + 2\frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & e^t + te^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^t + 2te^t & te^t + \frac{t^2}{2}e^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ -2e^t + 4te^t & -e^t + \frac{2t^2}{2}e^t & e^t - 2te^t + \frac{t^2}{2}e^t \\ 2e^t & e^t + te^t & te^t \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t + 2te^t & te^t + \frac{t^2}{2}e^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ -2e^t + 4te^t & -e^t + \frac{2t^2}{2}e^t & e^t - 2te^t + \frac{t^2}{2}e^t \\ 2e^t & e^t + te^t & te^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} e^t + 3te^t + t^2e^t & -2e^t + 2te^t + t^2e^t & 3e^t + 2te^t \end{pmatrix}$$

J7

J-7

Să se determine șirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ definite prin relațiile de recurență:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n - 5y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = 5x_n - 5y_n + 3z_n \\ z_{n+1} = 6x_n - 9y_n + 6z_n, \ n \in \mathbb{N}, \ x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Numele și prenumele	An	Grupa	Pagina
Szabó Szilárd	1	3	3

EXAMEN

Algebră liniară și geometrie analitică

J-7

Să se determine $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n - 5y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = 5x_n - 5y_n + 3z_n \\ z_{n+1} = 6x_n - 9y_n + 6z_n \end{cases}$$

$$U_n = A \cdot U_{n-1} = \dots = A^n \cdot U_0 = A^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 5 & -5 & 3 \\ 6 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda-2)\cdot(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$

$\lambda_{1,2} = 2$

$\lambda_3 = 3$

$\lambda = 2$

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \ / \cdot 2 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{x_2}{2}$; $x_1 = \alpha \Rightarrow x_2 = 2\alpha$

$2x_2 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 2x_3 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2}x_2 \Rightarrow x_3 = 3\alpha$

$$X = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 3$

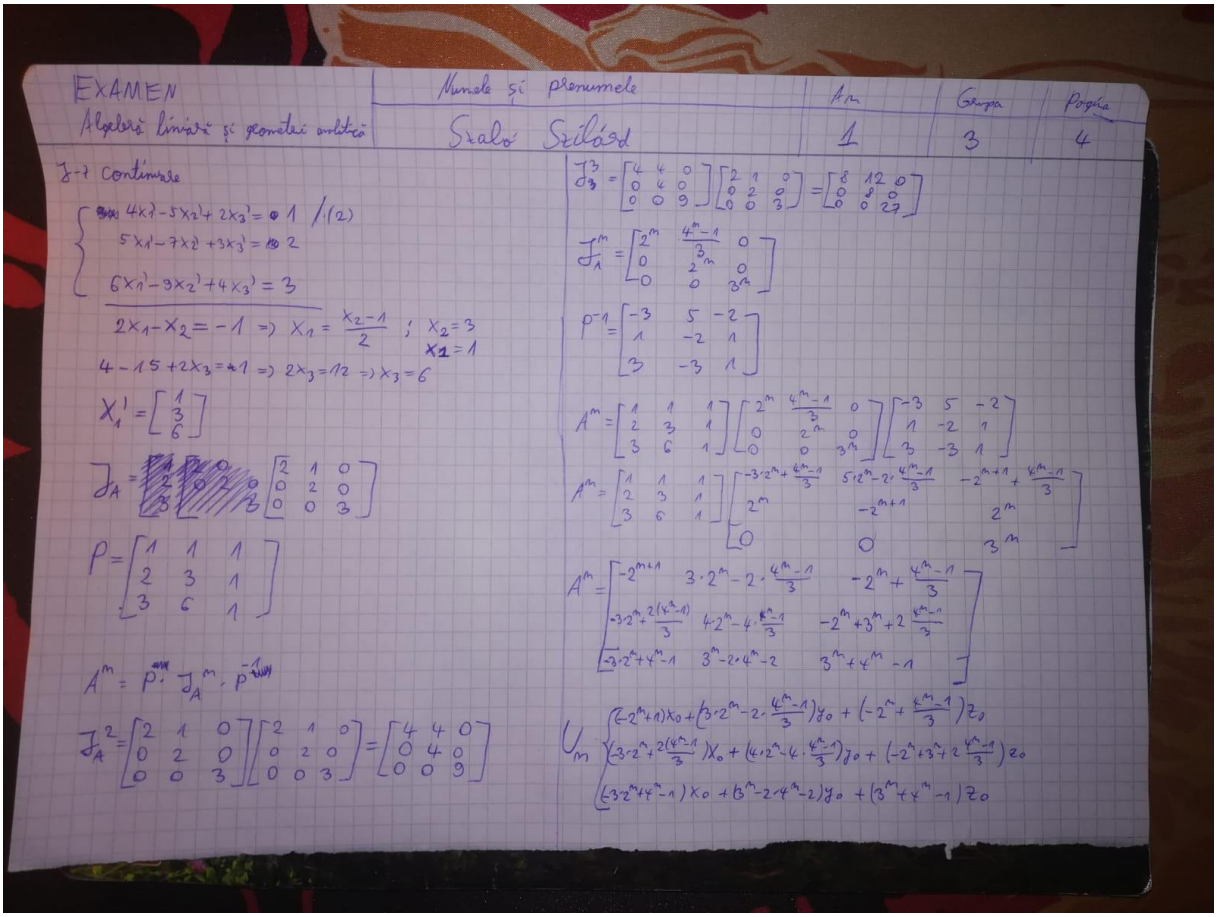
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$-x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \alpha$

$3x_1 - 5x_1 + 2x_3 = 0 \Rightarrow 2x_3 = 2x_1 \Rightarrow x_1 = x_3 = \alpha$

$$X = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A \cdot X_1 = X_1$



EXAMEN

Algebră liniară și geometrie analitică

Numele și prenumele	An	Grupa	Pagina
Szabó Szilárd	1	3	4

J-7 continuare

$$\begin{cases} 4x_1' - 5x_2' + 2x_3' = 1 \quad /\cdot(2) \\ 5x_1' - 7x_2' + 3x_3' = 2 \\ 6x_1' - 9x_2' + 4x_3' = 3 \end{cases}$$

$2x_1 - x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{x_2 - 1}{2}$; $x_2 = 3$, $x_1 = 1$

$4 - 15 + 2x_3 = -1 \Rightarrow 2x_3 = 12 \Rightarrow x_3 = 6$

$$X_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$J_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = P \cdot J_A^n \cdot P^{-1}$$

$$J_A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$J_3^3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

$$J_A^n = \begin{bmatrix} 2^n & \frac{4^n - 1}{3} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & \frac{4^n - 1}{3} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \cdot 2^n + \frac{4^n - 1}{3} & 5 \cdot 2^n - 2 \cdot \frac{4^n - 1}{3} & -2^n + 1 + \frac{4^n - 1}{3} \\ 2^n & -2^n + 1 & 2^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} -2^{n+1} & 3 \cdot 2^n - 2 \cdot \frac{4^n - 1}{3} & -2^n + \frac{4^n - 1}{3} \\ -3 \cdot 2^n + \frac{2(4^n - 1)}{3} & 4 \cdot 2^n - 4 \cdot \frac{4^n - 1}{3} & -2^n + 3^n + 2\frac{4^n - 1}{3} \\ -3 \cdot 2^n + 4^n - 1 & 3^n - 2 \cdot 4^n - 2 & 3^n + 4^n - 1 \end{bmatrix}$$

$$U_n \begin{cases} (-2^n + 1)x_0 + \left(3 \cdot 2^n - 2 \cdot \frac{4^n - 1}{3}\right)y_0 + \left(-2^n + \frac{4^n - 1}{3}\right)z_0 \\ \left(-3 \cdot 2^n + \frac{2(4^n - 1)}{3}\right)x_0 + \left(4 \cdot 2^n - 4 \cdot \frac{4^n - 1}{3}\right)y_0 + \left(-2^n + 3^n + 2\frac{4^n - 1}{3}\right)z_0 \\ (-3 \cdot 2^n + 4^n - 1)x_0 + (3^n - 2 \cdot 4^n - 2)y_0 + (3^n + 4^n - 1)z_0 \end{cases}$$

J8

J-8

Să se determine forma canonică Jordan, forma canonică reală, matricele de pasaj și A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{J-5}$ Forma canonică reală. Matricea de pasaj. A^n

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)^2\lambda + 2 - \lambda + 2 - \lambda$$

$$= -\lambda(4 - 4\lambda + \lambda^2) + 4 - 2\lambda$$

$$= -4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 + 4 - 2\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ rădăcină}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \;/_{-1} \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = -1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = -1$$

$$\Rightarrow \lambda - 1 = \pm i \Rightarrow \lambda_2 = 1 + i \quad \lambda_3 = 1 - i$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distincte $\Rightarrow J_A$ diagonală

$$J_A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 2$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1 \\ -x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} \text{ luăm } \alpha = 1 \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 1 + i$
$$\begin{cases} -(1+i)x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = (1+i)x_1 \\ -x_1 + (1-i)x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow -x_1 + (1-i)(1+i)x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -x_1 + 2x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_1$$

Pentru $x_1 = 1 \Rightarrow Z_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1+i \end{bmatrix}$ și cum $\overline{\lambda_2} = \lambda_3 \Rightarrow \overline{Z_2} = Z_3$

$$\Rightarrow Z_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1-i \end{bmatrix}$$

$$Z_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = X_2 \pm i X_3$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1+i & 1-i \end{bmatrix} \qquad P^{(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix} \qquad J_A^{(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificare: $P^{(\mathbb{R})} \cdot J_A^{(\mathbb{R})} = A \cdot P^{(\mathbb{R})}$

$$A^n = P \cdot J_A^n \cdot P^{-1}$$

$$J_A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (1+i)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-i)^n \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1+3i}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1-3i}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^n = P \cdot J_A^n \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1+i & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (1+i)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-i)^n \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2^n & (1+i)^n & i^n (1+i)^n (-1)^n \\ 2^n & -(1+i)^n & -i^n (1+i)^n (-1)^n \\ 2 \cdot 2^n & \underbrace{(1+i)(1+i)^n}_{(1+i)^{n+1}} & (1-i)^n \cdot i^n \cdot (1+i)^n \cdot (-1)^n \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

J-9

Să se determine forma canonică Jordan, matricea de pasaj și A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -6 & -12 \\ 18 & -11 & -3 \\ 18 & -9 & -5 \end{bmatrix}.$$

J10

J-10

Să se determine forma canonică Jordan, matricea de pasaj și A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume Mătieș Lorena Mihaela	Anul de studii 1	Grupa 30211	Pagina 4

4) J-1) Să se determine forma canonică Jordan, matricea de pasaj și A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -3 & -1-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda - 2)^3$$

$$\Rightarrow -(\lambda-2)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$\boxed{m_1 = 3}$$

$$(A - 2 \cdot I_3) \cdot X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = x_3$$

$$X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{d_1 = 2}$$

pt. $\alpha = 1$, $\beta = 0$ și $\alpha = 0$, $\beta = 1$

$$\Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - 2I_3) \cdot X' = X$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = X$$

$$x_1' + x_2' - x_3' = \alpha$$
$$-3x_1' - 3x_2' + 3x_3' = \beta$$
$$-2x_1' - 2x_2' + 2x_3' = \alpha + \beta$$

$\Rightarrow \beta = -3\alpha$ și $\alpha + \beta = -2\alpha$

deci $\beta = 3 - \alpha$, putem alege $\alpha = 1$ și $\beta = -3$;

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad X_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = [X_1 \mid X_2' \mid X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^n = P \cdot J_A^n \cdot P^{-1}$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Mătiez Lorena - Mihaela	1	30211	5

4) continuare:

Se verifică $P \cdot J_A = A \cdot P$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Adev.}$$

$$J_A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^n = P \cdot J_A^n \cdot P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ -3\cdot 2^n & 0 & 2^n \\ -2\cdot 2^n & 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^n & -2n\cdot 2^{n-1} & 3n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & -3\cdot 2^n - 2\cdot 2^n & 0 \\ 0 & 0 & -2\cdot 2^n + 3\cdot 2^n \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^n & -2n\cdot 2^n & 3n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & -5\cdot 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

J11

J-11

Să se determine forma canonică Jordan, forma canonică reală și matricele de pasaj pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \\ 8 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

J

3. Să se determine forma canonică Jordan, forma canonică reală și matricele de pasaj pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \\ 8 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 6 & -4-\lambda & 2 \\ 8 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(2-\lambda)(4+\lambda)(4-\lambda) - 16 - 0 - 12(2-\lambda) + (4-\lambda)6$$

$$= -(2-\lambda)(16-\lambda^2) - 16 + 24 - 12\lambda + 24 - 6\lambda$$

$$= -32 + 2\lambda^2 + 16\lambda - \lambda^3 + 32 - 18\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda \Leftrightarrow$$

$$-(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$A \cdot X = \lambda \cdot X \Leftrightarrow A \cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \\ 8 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 & \Rightarrow x_2 = 2x_1 \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 8x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \text{ pentru } \alpha = 1 \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \\ 8 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \\ 8 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 12 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 & \Rightarrow 2x_1 = x_2 \\ 12x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow -x_1 + 2x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \text{ pentru } \alpha = 1 \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

J12

J-12

Să se determine funcțiile derivabile $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - z(t) \\ y'(t) = -2x(t) - y(t) + z(t) \\ z'(t) = 3x(t) - y(t) - 3z(t), \quad t \in \mathbb{R},\ x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1. \end{cases}$$

EXAMEN Algebră liniară şi geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume şi prenume	Anul de studii	Grupa	Pa
	ILCA ANDREA IULIANA	1	30113	3

J-12

Să se determine funcțiile derivabile $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - z(t) \\ y'(t) = -2x(t) - y(t) + z(t) \\ z'(t) = 3x(t) - y(t) - 3z(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ -2 & -1-\lambda & 1 \\ 3 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda+1)(-\lambda-1)(-\lambda-3) +$$

$$+ (-1)(-2)(-1) - 3(-\lambda-1)(-1) - (-1)1\cdot(-\lambda+1) - (-\lambda-3)(-2)\cdot 0 =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \quad m_{-1} = 3$$

$\lambda = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - z = 0 \\ -2x + z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & z = 2x \\ & 3x - y - 2(2x) = 0 \\ & 3x - y - 4x = 0 \\ & -x - y = 0 \Rightarrow -y = x \\ & y = -x \end{aligned}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix}$$

$\lambda = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x' - z' = 1 \\ -2x' + z' = -1 \\ 3x' - y' - 2z' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & -z' = 1 - 2x' \\ & z' = 2x' - 1 \\ & 3x' - y' - 2(2x'-1) = 2 \\ & 3x' - y - 4x' + 2 = 2 \\ & -x' - y' = 0 \\ & -y' = x' \Rightarrow y' = -x' \end{aligned}$$

$$X_2' = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 2\alpha - 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x'' - z'' = \frac{1}{2} \\ -2x'' + z'' = -\frac{1}{2} \\ 3x'' + y'' - 2z'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & -z'' = \frac{1}{2} - 2x \\ & z'' = 2x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3x'' + y'' - 2\left(2x'' - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$3x'' + y'' - 4x'' - 1 = 0$$

$$x'' + y'' - 1 = 0$$

$$y'' = -x + 1 \Rightarrow y'' = 1 - x$$

$$\Rightarrow X_3'' = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \\ 2\alpha - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad J_A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

EXAMEN Algebră liniară şi geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume şi prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	ILCA ANDREA IULIANA	1	30113	4

J-12 (continuare)

$$X(t) = e^{At} \cdot C$$

$$e^{At} = P \cdot e^{J_A \cdot t} \cdot P^{-1}$$

$$P^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{J_A \cdot t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & t \cdot e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & t \cdot e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$P \cdot e^{J_A \cdot t} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & t \cdot e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & t \cdot e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{2 \cdot t \cdot e^{-t} + e^{-t}}{2} & \frac{2 \cdot t \cdot e^{-t} + e^{-t}}{4} \\ -e^{-t} & \frac{-2 \cdot t \cdot e^{-t} - e^{-t}}{2} & \frac{-2 \cdot t \cdot e^{-t} + 3 \cdot e^{-t}}{4} \\ 2 \cdot e^{-t} & 2 \cdot t \cdot e^{-t} & 0 \end{bmatrix}$$

$$P \cdot e^{J_A \cdot t} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 \cdot t \cdot e^{-t} + e^{-t} & 0 & t \cdot e^{-t} + e^{-t} \\ -2 \cdot t \cdot e^{-t} & e^{-t} & -t \cdot e^{-t} - e^{-t} \\ 3 \cdot t \cdot e^{-t} & -t \cdot e^{-t} & 2 \cdot t \cdot e^{-t} + e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$X(t) = e^{At} \cdot C, \quad C = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} 3 \cdot t \cdot e^{-t} + 2 \cdot e^{-t} \\ -3t \cdot e^{-t} - e^{-t} \\ 5 \cdot t \cdot e^{-t} + e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}(3t + 2) \\ e^{-t}(-3t - 1) \\ e^{-t}(5t + 1) \end{bmatrix}$$

J-13

Să se determine șirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ definite prin relațiile de recurență:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n + 3z_n \\ y_{n+1} = -x_n + 10y_n + 6z_n \\ z_{n+1} = 2x_n - 14y_n - 8z_n, \ n \in \mathbb{N}, \ x_0 = 1, \ y_0 = 0, \ z_0 = -1. \end{cases}$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	CRIȘAN SEBASTIAN-GABRIEL	1	4	5

J-7. Se se det șirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ definite prin rel de recurență

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n + 3z_n \\ y_{n+1} = -x_n + 10y_n + 6z_n \\ z_{n+1} = 2x_n - 14y_n - 8z_n \ ; \ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$x_0 = 1; \ y_0 = 0; \ z_0 = -1$

Soluție:

$U_{n+1} = A \cdot U_n$

$U_n = A \cdot U_{n-1} = A \cdot A \cdot U_{n-2} = A^n \cdot U_0; \ U_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Calculăm A^n

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 10 & 6 \\ 2 & -14 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 3 \\ -1 & 10-\lambda & 6 \\ 2 & -14 & -8-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_3+2L_2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 3 \\ -1 & 10-\lambda & 6 \\ 0 & 6-2\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 10-\lambda & 6 \\ 6-2\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6-2\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(10-\lambda)(4-\lambda) - 6(6-2\lambda)] +$$

$$+ 3(4 - \lambda - 6 + 2\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)(40 - 10\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 36 + 12\lambda) + 3(\lambda - 2) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) + 3(\lambda - 2) =$$

$$\cancel{= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda}$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (2-\lambda)(\lambda - 1)^2$$

$(2-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \quad \lambda = 1$ - sol dublă

$\lambda = 2$

$$\begin{cases} 3x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = \alpha; \ x_2 = -\alpha \\ -x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_1 - 14x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = 8x_2 + 6x_3 = -8\alpha + 6\alpha = -2\alpha$

$\alpha = 1 \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ - vect propr

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	CRIȘAN SEBASTIAN-GABRIEL	1	4	6

J-7. Continuare

$\lambda = 1$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_1 - 14x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$

$x_3 = \alpha$

$12x_2 + 9x_3 = 0$

$4x_2 = -3x_3$

$x_2 = -\frac{3}{4} \cdot x_3 = -\frac{3}{4} \cdot \alpha$

$x_1 = -3x_2 - 3x_3 = \frac{9}{4}\alpha - 3\alpha = -\frac{3\alpha}{4}$

$\alpha = 4 \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ - vect prop

Găsim un vect principal (asociat)

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -3 \\ -x_1 + 9x_2 + 6x_3 = -3 \\ 2x_1 - 14x_2 - 9x_3 = 4 \end{cases}$

$x_3 = \alpha$

$12x_2 + 9x_3 = -6$

$12x_2 = -6 - 9\alpha$

$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\alpha$ $\quad \alpha = 2 \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$x_1 = -3 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\alpha - 3\alpha$

$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\alpha$

$\cancel{P = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}}$ $\quad P = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^n = P \cdot J_A^n \cdot P^{-1}$

$J_A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$J_A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$J_A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	CRIȘAN SEBASTIAN-GABRIEL	1	4	7

J-7 Continuare $\quad \det P = 11$

$P^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -10 & 6 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$A^n = P \cdot J_A^n \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$

$\cdot \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -10 & 6 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} -2 \cdot 2^n & -3 & -3n \\ -2^n & -3 & -3n+1 \\ 2^n & 4 & 4n+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 6 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 20 \cdot 2^n - 9 + 3n & -12 \cdot 2^n + 12 - 15n & 6 \cdot 2^n - 6 - 9n \\ 10 \cdot 2^n - 9 + 3n - 1 & -6 \cdot 2^n + 12 - 15n + 5 & 3 \cdot 2^n - 6 - 9n + 3 \\ -10 \cdot 2^n + 12 - 4n - 2 & 6 \cdot 2^n - 16 + 20n + 10 & -3 \cdot 2^n + 8 + 12n + 6 \end{bmatrix}$

$U_n = A^n \cdot U_0 = A^n \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$x_n = \frac{1}{11}(20 \cdot 2^n - 9 + 3n - 6 \cdot 2^n + 6 + 9n)$

$y_n = \frac{1}{11}(10 \cdot 2^n - 9 + 3n - 1 - 3 \cdot 2^n + 6 + 9n - 3)$

$z_n = \frac{1}{11}(-10 \cdot 2^n + 12 - 4n - 2 + 3 \cdot 2^n - 8 - 12n - 6)$

J-14

Să se determine A^n, $n \in \mathbb{N}$ și $\ln A$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA, TI-ro., an 1, seria A) 18/01/2011	Nume și Prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Bob Robert-Leonard	1	90311	1

J-16 Să se det A^n, $n \in \mathbb{N}$ și $\ln A$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I_3| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 & -2 \\ -2 & -2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & -2 \\ -2 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_1+L_3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & -1 \\ -2 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda & -1 \\ -1+\lambda & -1-\lambda & 1 \\ -1+\lambda & -\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1-C_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \\ -1+\lambda & -\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(2\lambda-\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-1)^2$$

$\lambda = 3$ cu multiplicitate 3

pt $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 1x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2$

$\Rightarrow x_3 = -x_2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

pt $\alpha = 1 \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_1' \begin{cases} 3x_1' + 5x_2' - 2x_3' = -1 \\ -2x_1' - x_2' + x_3' = 1 \\ -x_1' - x_2' = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1' = -1 - x_2' \Rightarrow +2 + 2x_2' - x_2' + x_3' = 1$

$x_3' = -1 - x_2' \Rightarrow X_1' = \begin{pmatrix} -1-\alpha \\ \alpha \\ -1-\alpha \end{pmatrix}$

pt $\alpha = 1$ $X_2' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 3x_1'' + 5x_2'' - 2x_3'' = -2 \\ -2x_1'' - x_2'' + x_3'' = 1 \\ -x_1'' - x_2'' = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1'' = -x_2''$

Ecuația 2: $x_2'' - x_2'' + x_3'' = 1$

$x_3'' = 1 - x_2''$

$\Rightarrow X'' = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -1-\alpha \end{pmatrix}$

pt $\alpha = -1$: $X_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2+L_1}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3-2L_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) =$

$P^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1+L_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3-2L_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$

$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3-2L_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) =$

$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$

EXAMEN Algebra liniară și geometrie analitică (CA, TI-rom., an 1, seria A)	Numele și Prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Bob Robert - Leonard	1	30211	2

J-15 continuare

$$A^n = P \cdot J_A^n \cdot P^{-1}$$

$$J_A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -n-2 & -\frac{n(n-1)}{2} - 2n + 1 \\ 1 & -2n+1 & \frac{n(n-1)}{2} + n - 1 \\ 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n+2+\frac{n(n-1)}{2} & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ n+2+\frac{n(n-1)}{2}+2n-1 & n+2+2\left(\frac{n(n-1)}{2}+2n-1\right) & -1+2n+1-3\left(-\frac{n(n-1)}{2}-2n+1\right) \\ 2n-1-\frac{n(n-1)}{2}-n+1 & 2n-1-2\left(\frac{n(n-1)}{2}+n-1\right) & 1+4n-2-3\left(\frac{n(n-1)}{2}+n-1\right) \\ -n-\frac{n(n-1)}{2} & -n-n(n-1) & 1-2n-3\frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix} = A^n$$

J15

J-15

Să se determine funcțiile derivabile $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 5x(t) - 4y(t) + 3z(t) \\ z'(t) = -x(t) \qquad\qquad - 3z(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(9) Să se determine funcțiile derivabile $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 5x(t) - 4y(t) + 3z(t) \\ z'(t) = -x(t) \qquad\qquad -3z(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

– IR –

Fie $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Sistemul se scrie $X' = A \cdot X$, unde

$$X = X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Conform aplicației 1 a funcțiilor de matrice, soluția generală este: $X(t) = e^{A \cdot t} \cdot C$, $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ vector constant arbitrar

$\det(A-\lambda I_3)=0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -4-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-4-\lambda)(-3-\lambda)+3+2(-4-\lambda)+5(-3-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(4+\lambda)(3+\lambda)+3-8-2\lambda-15-5\lambda =$$

$$= (\lambda^2-3\lambda+4)(3+\lambda)-7\lambda-20 =$$

$$= 3\lambda^2+\lambda^3-9\lambda-3\lambda^2+12+4\lambda-7\lambda-20=0$$

$$= \lambda^3 \ldots = -\lambda^3-6\lambda^2-12\lambda-8 =$$

$$= -\lambda^3-8-6\lambda^2-12\lambda =$$

$$= -(\lambda^3+\overset{1\cdot 2\cdot 3}{8})-6\lambda(\lambda+2) =$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+4)-6\lambda(\lambda+2) =$$

$$= (\lambda+2)(-\lambda^2+2\lambda-4-6\lambda) =$$

$$= (\lambda+2)(-\lambda^2-4\lambda-4) =$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda+2)^2 = -(\lambda+2)^3$$

$\det(A-\lambda I_3)=0 \iff -(\lambda+2)^3=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-2,\ m=3$

<u>$\lambda=-2$</u> : $(A-\lambda I_3)X=O_3 \iff (A+2I_3)X=O_3,\quad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ 5x-2y+3z=0 \\ -x \qquad -z=0 \end{cases} \Rightarrow 3x-y-2x=0 \Rightarrow y=-x$$

$$\Rightarrow z=-x$$

$x=\alpha \Rightarrow y=-\alpha,\ z=-\alpha$

$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix},\quad d=1$ $\quad \begin{matrix} m=3 \\ d=1 \end{matrix} \Rightarrow$ 1 vector propriu, 2 vectori auxiliari

$$\alpha = 1 \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vector auxiliar:

$$(A + 2I_3)X' = X_1 \quad , \quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x' - y' + 2z' = 1 \\ 5x' - 2y' + 3z' = -1 \\ -x' \qquad - z' = -1 \end{cases} \Rightarrow 3x' - y' + 2 - 2x' = 1 \Rightarrow y' = -1 - x'$$

$$\Rightarrow z' = 1 - x'$$

$$x' = \alpha \Rightarrow y' = -1 - \alpha \ , \quad z' = 1 - \alpha$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow X_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + 2I_3)X'' = X_2' \quad , \quad X'' = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x'' - y'' + 2z'' = 1 \\ 5x'' - 2y'' + 3z'' = -1 \\ -x'' \qquad - z'' = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x'' - y'' - 2x'' = 1 \Rightarrow y'' = 1 - x''$$

$$\Rightarrow z'' = -x''$$

$$x'' = \alpha \Rightarrow y'' = 1 - \alpha \ , \quad z'' = -\alpha$$

$$\Rightarrow X'' = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow X_3'' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P = [X_1 | X_2' | X_3''] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad J_A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = [P \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_1+L_2}{=} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$\overset{L_1+L_3}{=} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_2-L_1}{=} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$\overset{L_1-L_2}{=} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_3-L_1}{=} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right] =$$

$$\overset{\substack{(-1)L_1 \\ (-1)L_2 \\ (-1)L_3}}{=} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{A \cdot t} = P \cdot e^{J_A t} \cdot P^{-1}$$

$$e^{J_A t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & t e^{-2t} & \frac{t^2}{2} e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & t e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (\text{cap c})$$

$$\Rightarrow e^{A \cdot t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} & t e^{-2t} & \frac{t^2}{2} e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & t e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t} & t e^{-2t} + e^{-2t} & \frac{t^2}{2} e^{-2t} + t e^{-2t} + e^{-2t} \\ -e^{-2t} & -t e^{-2t} - 2 e^{-2t} & -\frac{t^2}{2} e^{-2t} - 2 t e^{-2t} \\ -e^{-2t} & -t e^{-2t} & -\frac{t^2}{2} e^{-2t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
-\cancel{2e^{-2t}} + te^{-2t} + e^{-2t} + t^2e^{-2t} + \cancel{2e^{-2t}} + 2e^{-2t} & -\cancel{e^{-2t}} + \frac{t^2}{2}e^{-2t} + te^{-2t} + \cancel{e^{-2t}} & \cancel{-2e^{-2t}} + te^{-2t} + \cancel{e^{-2t}} + \frac{t^2}{2}e^{-2t} + te^{-2t} + \cancel{e^{-2t}} \\
\cancel{2e^{-2t}} - te^{-2t} - \cancel{2e^{-2t}} - t^2e^{-2t} - 4te^{-2t} & e^{-2t} - \frac{t^2}{2}e^{-2t} - 2te^{-2t} & \cancel{2e^{-2t}} - te^{-2t} - \cancel{2e^{-2t}} - \frac{t^2}{2}e^{-2t} - 2te^{-2t} \\
\cancel{2e^{-2t}} - te^{-2t} - t^2e^{-2t} - \cancel{2e^{-2t}} & \cancel{e^{-2t}} - \frac{t^2}{2}e^{-2t} - \cancel{e^{-2t}} & 2e^{-2t} - te^{-2t} - \frac{t^2}{2}e^{-2t} - e^{-2t}
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
e^{-2t}(t^2+t+3) & e^{-2t}\left(\frac{t^2}{2}+t\right) & e^{-2t}\left(\frac{t^2}{2}+2\right) \\
e^{-2t}(-t^2-5) & e^{-2t}\left(\frac{t^2}{2}-2t+1\right) & e^{-2t}\left(-\frac{t^2}{2}-3t\right) \\
e^{-2t}(-t^2-t) & e^{-2t}\left(-\frac{t^2}{2}\right) & e^{-2t}\left(-\frac{t^2}{2}-t+1\right)
\end{bmatrix}
$$

$$
= e^{-2t}\begin{bmatrix}
t^2+t+3 & \frac{t^2}{2}+t & \frac{t^2}{2}+2 \\
-t^2-5 & \frac{t^2}{2}-2t+1 & -\frac{t^2}{2}-3t \\
-t^2-t & -\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2}-t+1
\end{bmatrix}
$$

$\Rightarrow$ Soluția generală:

$$
\begin{cases}
x(t) = e^{-2t}\left[(t^2+t+3)C_1 + \left(\frac{t^2}{2}+t\right)C_2 + \left(\frac{t^2}{2}+2\right)C_3\right] \\
y(t) = e^{-2t}\left[(-t^2-5)C_1 + \left(\frac{t^2}{2}-2t+1\right)C_2 + \left(-\frac{t^2}{2}-3t\right)C_3\right] \\
z(t) = e^{-2t}\left[(-t^2-t)C_1 - \frac{t^2}{2}C_2 + \left(-\frac{t^2}{2}-t+1\right)C_3\right]
\end{cases}
$$

$\mathbb{R}-\{1\}$

$G = (\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$; $H = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x), \forall x\}$

Fie $f, g \in G \to f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f \rho_H g \Leftrightarrow f^{-1} \cdot g \in H$

$\Leftrightarrow (f^{-1} \cdot g)(-x) = (f^{-1} \cdot g)(x)$

$f^{-1}(x) = -f(x)$

$\cancel{f^{-1}(g(-x)) = f^{-1}(g(x))}$

$\cancel{\Leftrightarrow -f(g(-x)) = -f(g(x))}$

$\cancel{\Leftrightarrow (f \circ g)}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(-x) \cdot g(-x) = f^{-1}(x) \cdot g(x)$

$\Leftrightarrow -f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x)$

$\Leftrightarrow f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x)$

$\Leftrightarrow (f \cdot g)(-x) = (f \cdot g)(x)$

$\Rightarrow f \cdot g$ – ~~pară~~ funcție pară

$\Rightarrow f, g$ – au aceeași paritate

Fie $F : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \{0, 1\}$, $F(X) =$ paritatea fct. X

J16

J-16

Să se determine funcțiile derivabile $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 9y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = 6x(t) - 11y(t) - 5z(t) \\ z'(t) = -7x(t) + 13y(t) + 6z(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU-ro, an 1, seria A) 22/01/2021	Nume și prenume GRIGORE DAN-MIHAI	Anul de studii I	Grupa 30113	Pagina 3

J-16 Să se determine funcțiile derivabile $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 9y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = 6x(t) - 11y(t) - 5z(t) \\ z'(t) = -7x(t) + 13y(t) + 6z(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -9 & -4 \\ 6 & -11-\lambda & -5 \\ -7 & 13 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-11-\lambda)(6-\lambda) -$$

$$-(6 \cdot 13 \cdot 4) - (7 \cdot 9 \cdot 5) - 4 \cdot 7(-11-\lambda) + 5 \cdot 13(5-\lambda) +$$

$$+ 6 \cdot 9(6-\lambda) = -\lambda^3$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\lambda_1 = 0$

$$\begin{cases} 5x - 9y - 4z = 0 \\ 6x - 11y - 5z = 0 \\ -7x + 13y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9y + 4z}{5}$$

not $y = \alpha$

$z = \beta$

$$X_1 = \begin{bmatrix} \frac{9\alpha + 4\beta}{5} \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Fie $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 5x' - 9y' - 4z' = -1 \\ 6x' - 11y' - 5z' = -1 \\ -7x + 13y + 6z' = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9y + 4z - 1}{5}$$

$$X_2' = \begin{bmatrix} \frac{9\alpha + 4\beta - 1}{5} \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Fie $X_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 5x'' - 9y'' - 4z'' = 5 \\ 6x'' - 11y'' - 5z'' = 6 \\ -7x'' + 13y'' + 6z'' = -7 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9y + 4z + 5}{5}$$

$$X_3' = \begin{bmatrix} \frac{9\alpha + 4\beta + 5}{5} \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Fie $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU-ro, an 1, seria A) 22/01/2021	Nume și prenume GRIGORE DAN-MIHAI	Anul de studii I	Grupa 30113	Pagina 4

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{J_A \cdot t} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{A \cdot t} = P \cdot e^{J_A \cdot t} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -7 & -6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{A \cdot t} = \begin{bmatrix} 5t+1 & -9t & -4t \\ 6t & -11t+1 & -5t \\ -7t & 13t & 6t+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = (5t+1) \cdot C_1 - 9t \cdot C_2 - 4t \cdot C_3 \\ y(t) = 6t \cdot C_1 + (-11t+1) \cdot C_2 - 5t C_3 \\ z(t) = -7t \cdot C_1 + 13t \cdot C_2 + (6t+1) \cdot C_3 \end{cases}$$

unde $C = [c_1, c_2, c_3]^t$ - vector constant arbitrar

J17

J-17

Să se determine șirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ definite prin relațiile de recurență:

$$\begin{cases} x_{n+1} = -3x_n + 4y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = -x_n + 2y_n + z_n \\ z_{n+1} = -5x_n + 4y_n + 4z_n, \ n \in \mathbb{N}, \ x_0 = 1, \ y_0 = 1, \ z_0 = 2. \end{cases}$$

$\boxed{J-23}$ Relații de recurență

$$\begin{cases} x_{n+1} = -3x_n + 4y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = -x_n + 2y_n + z_n \\ z_{n+1} = -5x_n + 4y_n + 4z_n \end{cases}, n \in \mathbb{N} \qquad \begin{matrix} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = 2 \end{matrix}$$

Notăm $U_n = [x_n, y_n, z_n]$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$U_{n+1} = A \cdot U_n \Rightarrow U_n = A^n \cdot U_0$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -5 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1-\lambda & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_3-L_1}{=} -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1+\lambda)(2-\lambda)^2 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ n_1 = 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \\ n_2 = 2 \end{matrix}$$

$\lambda_1 = -1 \Rightarrow$

$(A + I_3)X = 0$

$$\begin{cases} -2x + 4y + 2z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \Rightarrow x = 3y + z \\ -5x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} -15y - 5z + 4y + 5z = 0 \Leftrightarrow -11y = 0 \Rightarrow y = 0$

$\begin{cases} y = 0 \\ x = z = \alpha \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ luăm $\alpha = 1 \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$n_1 = d_1$

$\lambda = 2 \Rightarrow$

$(A - 2I_3)X = 0$

$$\begin{cases} -5x + 4y + 2z = 0 \\ -x \quad\quad + z = 0 \Rightarrow x = z \\ -5x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$\overset{(3)}{\Longrightarrow} -3x + 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{3x}{4} \quad \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{3\alpha}{4} \\ \alpha \end{bmatrix}$

$x = z = \alpha \Rightarrow y = \frac{3\alpha}{4}$

$d_2 = 1 < n_2 \Rightarrow$ ne mai trebuie un vector auxiliar

Luăm $\alpha = 1 \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} -5x' + 4y' + 2z' = 1 \\ -x' \quad\quad + z' = \frac{3}{4} \Rightarrow x' = z' - \frac{3}{4} \\ -5x' + 4y' + 2z' = 1 \end{cases}$$

Luăm $x' = 1 \Rightarrow z' = \frac{7}{4} \Rightarrow y' = \frac{5}{8}$

$\Rightarrow X_3' = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{8} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}$

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ 1 & 1 & \frac{7}{4} \end{bmatrix} \\ X_1 \quad X_2 \quad X_3' \end{array} \qquad J_A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^n = P \cdot J_A^n \cdot P^{-1}$$

$$J_A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & 4 & -\frac{10}{3} \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^n = P \cdot J_A^n \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^n & 2^n & \frac{2 \cdot 2^n + 2^n \cdot n}{2} \\ 0 & \frac{3 \cdot 2^n}{4} & \frac{5 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n \cdot n}{8} \\ (-1)^n & 2^n & \frac{7 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^n \cdot n}{4} \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \overset{a}{\frac{(-1)^n \cdot 11 - 2 \cdot 2^n - 6 \cdot 2^n \cdot n}{9}} & \overset{b}{\frac{-4(-1)^n + 4 \cdot 2^n}{3}} & \overset{c}{\frac{-2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 2^n + 6 \cdot 2^n \cdot n}{9}} \\ \overset{d}{\frac{-2^n \cdot n}{2}} & \overset{e}{2^n} & \overset{f}{\frac{2^n \cdot n}{2}} \\ \overset{g}{\frac{11 \cdot (-1)^n - 11 \cdot 2^n - 6 \cdot 2^n \cdot n}{9}} & \overset{h}{\frac{-4(-1)^n + 4 \cdot 2^n}{3}} & \overset{i}{\frac{-2 \cdot (-1)^n + 11 \cdot 2^n + 6 \cdot 2^n \cdot n}{9}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_n = a X_0 + b Y_0 + c Z_0 \\ Y_n = d X_0 + e Y_0 + f Z_0 \\ Z_n = g X_0 + h Y_0 + i Z_0 \end{cases}, \qquad \begin{array}{l} X_0 = 1 \\ Y_0 = 1 \\ Z_0 = 2 \end{array} \text{ (din ipoteză)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X_n = a + b + 2c \\ Y_n = d + e + 2f \\ Z_n = g + h + 2i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{n+1} = -3X_n + 4Y_n + 2Z_n \\ Y_{n+1} = -X_n + 2Y_n + Z_n \\ Z_{n+1} = -5X_n + 4Y_n + 4Z_n \end{cases}$$

← se înlocuiesc X_n, Y_n, Z_n cu valorile obținute mai sus (respectiv $a, b, c, d, e, f, g, h, i$) și se obțin relațiile de recurență pentru $X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}$ în funcție de n

J18

J-18

Să se determine $\cos\left(\frac{\pi}{6}A\right)$ și $\sin\left(\frac{\pi}{6}A\right)$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{J\text{-}23}$ $\cos\left(\frac{\pi}{6}A\right)$ $\sin\left(\frac{\pi}{6}A\right)$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & -2 \\ 1-\lambda & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_2-L_1}{\underset{L_3-L_1}{=}} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$$
$$m_1 = 1 \quad n_2 = 1 \quad n_3 = 1$$

$\lambda_1 = 1$

$$(A-I_3)X = 0 \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 \\ x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (n_1 = d_1 = 1)$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\alpha_2 = 2$

$$(A-2I_3)X = 0 \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow -x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 + x_3 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{cases} \quad (n_2 = d_2 = 1)$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha = 1 \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha_3 = 3$

$$(A-3I_3)X = 0 \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow -x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad (n_3 = d_3 = 1)$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha = 1 \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ X_1 \quad X_2 \quad X_3 \end{array} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\pi}{6} A = \begin{bmatrix} \frac{4\pi}{6} & -\frac{\pi}{6} & -\frac{2\pi}{6} \\ \frac{2\pi}{0} & \frac{\pi}{6} & -\frac{2\pi}{6} \\ \frac{\pi}{6} & -\frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{3} & -\frac{\pi}{6} & -\frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{6} & -\frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{6} & -\frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{f(A) = P \cdot f(J_A) \cdot P^{-1} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6} A\right) = P \cdot f\left(\frac{\pi}{6} J_A\right) P^{-1}}$$

sin cos

o dezvoltă $\frac{\pi}{6} A$

???

$$f(J_A) = \begin{bmatrix} f(1) & 0 & 0 \\ 0 & f(2) & 0 \\ 0 & 0 & f(3) \end{bmatrix} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6} J_A\right) = \begin{bmatrix} f\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 & 0 \\ 0 & f\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & f\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

f

- $\sin \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6} J_A\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} A\right) = P \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} J_A\right) \cdot P^{-1}$

- $\cos \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6} J_A\right) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} A\right) = P \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} J_A\right) \cdot P^{-1}$

f

J19

J-19

Să se determine șirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ definite prin relațiile de recurență:

$$\begin{cases} x_{n+1} = -3x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = 5x_n - 2y_n + 4z_n \\ z_{n+1} = 5x_n + y_n + z_n, \ n \in \mathbb{N}, \ x_0 = 1, \ y_0 = -1, \ z_0 = 1. \end{cases}$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Lăzărescu Elena Fabiana	1	301A3	2

J-19) Să se determine șirurile $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n$ definite prin relația de recurență.

$$\begin{cases} x_{n+1} = -3x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = 5x_n - 2y_n + 4z_n \\ z_{n+1} = 5x_n + y_n + z_n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \ x_0 = 1, y_0 = -1, z_0 = 1$$

$$U_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}; \quad U_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{n+1} = A \cdot U_n \quad ; \quad U_n = A^n \cdot U_0$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 & 1 \\ 5 & -2-\lambda & 4 \\ 5 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad \underline{\underline{L_2 - L_3}}$$

$$= \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -3-\lambda & 3+\lambda \\ 5 & \cancel{2-\lambda}\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3+\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & \cancel{2-\lambda}\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad \underline{\underline{C_2 + C_3}}$$

$$= (3+\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -(3+\lambda) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+3) \cdot (-1) \cdot (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -(\lambda+3) & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda+3)^2 \cdot (\lambda - 2)$$

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = -3, & m_{-3} = 2 \\ \lambda_3 = 2, & m_2 = 1 \end{cases}$$

$\lambda = -3$:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \quad 5x_1 + 5x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 \end{cases}$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Lăzărescu Elena Fabiana	1	301A3	3

J-19) Continuare

Pentru $x_2 = x_3 = 1 \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A \cdot X' = X$$

$$\begin{cases} -3x_1' - x_2' + x_3' = -1 \\ 5x_1' - 2x_2' + 4x_3' = 1 \\ 5x_1' + x_2' + x_3' = 1 \end{cases}$$

O soluție este $x_1' = x_3' = 0$, $x_2' = 1$

$$\Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 2$

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + x_3 = 0 & (1) \\ 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 & (2) \\ 5x_1 - x_2 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$(1) - (2) \Rightarrow 3x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3$

$5x_1 - \cancel{4x_2} + \cancel{4x_2} = 0 \Rightarrow 5x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$$\Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Zăzărescu Elena Fabiana	1	30113	4

J-19) Continuare

$$J_A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J_A^2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^2 \cdot 3^2 & -6 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \cdot 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^2 \cdot 3^2 & \frac{-(-1)^2 \cdot 3^2 \cdot 2}{3} & 0 \\ 0 & (-1)^2 \cdot 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

$$J_A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n \cdot 3^n & \frac{-(-1)^n \cdot 3^n \cdot n}{3} & 0 \\ 0 & (-1)^n \cdot 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

$$A^n = P \cdot J_A^n \cdot P^{-1}$$

$$P \cdot J_A^n = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^n \cdot 3^n & -(-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot n & 0 \\ 0 & (-1)^n \cdot 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^{n+1} \cdot 3^n & (-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot n & 0 \\ (-1)^n \cdot 3^n & \frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1} - (-1)^n \cdot 3^n \cdot n}{3} & 2^n \\ (-1)^n \cdot 3^n & \frac{-(-1)^n \cdot 3^n \cdot n}{3} & 2^n \end{bmatrix}$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Zăzărescu Elena Fabiana	1	30113	5

J-19)

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n \cdot 3^n & (-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot n & -(-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot n \\ 2^n - (-1)^n \cdot 3^n & [(-1)^n \cdot 3^n - (-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot n] & [2^n - (-1)^n \cdot 3^n + (-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot n] \\ 2^n - (-1)^n \cdot 3^n & -(-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot n & 2^n + (-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot n \end{bmatrix}$$

$$U_n = A^n \cdot U_0 = A^n \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_n = (-1)^n \cdot 3^n - (-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot n - (-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot n \\ Y_n = 2^n - (-1)^n \cdot 3^n - [(-1)^n \cdot 3^n - (-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot n] + 2^n - (-1)^n \cdot 3^n + (-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot n. \\ Z_n = 2^n - (-1)^n \cdot 3^n + (-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot n + 2^n \cdot (-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot n \end{cases}$$

J-20

Să se determine e^A și $\sin\left(\frac{\pi}{6}A\right)$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

J-24. Fie $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Atunci $e^A = \begin{pmatrix} e^5 & e^{-3} & e^2 \\ e^6 & e^{-4} & e^4 \\ e^4 & e^{-4} & e^5 \end{pmatrix}$ și

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}A\right) = \begin{pmatrix} \sin\frac{5\pi}{6} & \sin\left(-\frac{3\pi}{6}\right) & \sin\frac{2\pi}{6} \\ \sin\frac{6\pi}{6} & \sin\left(-\frac{4\pi}{6}\right) & \sin\frac{4\pi}{6} \\ \sin\frac{4\pi}{6} & \sin\left(-\frac{4\pi}{6}\right) & \sin\frac{5\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{6} & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\pi & \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

SV-24. $T: C^\infty(0,\infty) \to C^\infty(0,\infty)$ $T(f(x)) = \frac{f'(x)}{x^2}$ $\forall x > 0$

Fie λ o valoare proprie arbitrară a endomorfismului T. Atunci $\lambda \neq 0$ și dacă y - vector propriu corespunzător acestei valori

Atunci $T(y) = \lambda y \iff \frac{y'}{x^2} = \lambda y \iff$

$\frac{dy}{dx} = \lambda x^2 y \;\Big|\cdot \frac{dx}{y} \iff \frac{dy}{y} = \lambda x^2 dx \iff$

$\int \frac{dy}{y} = \int \lambda x^2 dx \iff \ln|y| = \frac{\lambda x^3}{3} + c$

$|y| = e^{\frac{\lambda x^3}{3} + c}$ $\quad |y| = e^c \cdot e^{\frac{1}{3}\lambda x^3}$

Luăm $c = 0 \iff |y| = e^{\frac{1}{3}\lambda x^3} \iff y = \pm e^{\frac{1}{3}\lambda x^3}$

Deci valorile proprii ale endomorfismului T sunt numerele reale diferite de zero adică $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Fiecărei valori proprii λ îi corespunde vectorul propriu

$y = e^{\frac{1}{3}\lambda x^3}$

J21

J-21

Să se determine forma canonică Jordan, matricea de pasaj și A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -15 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	RACHERIU NICOLAE	1	30113	4

J-21) $J_A, P, A^n = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -15 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Determinăm valorile proprii:

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 4-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_3 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 4-\lambda & -5 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\cdot \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 4-\lambda & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{C_2+C_3}{=} (\lambda-2) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -9 & -15 \\ 1 & -1-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\cancel{= (\lambda-2)\cdot(-1)\cdot(-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} -9 & -15 \\ -1-\lambda & -5 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)\cdot(45-15(\lambda+1))}$$

$$= (\lambda-2)\cdot(-1)\cdot(-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 5-\lambda & -9 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)\cdot((5-\lambda)(-1-\lambda)-1\cdot(-9))$$

$$= -(\lambda-2)\cdot(-5-5\lambda+\lambda+\lambda^2+9) = -(\lambda-2)\cdot(\lambda^2-4\lambda+4)$$

$$= -(\lambda-2)\cdot(\lambda-2)^2 = -(\lambda-2)^3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2,\ m_2 = 3$$

$$(A - 2I_3)\cdot X = 0,\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 15x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 5x_3 - 2x_2$$

Fie $x_2 = \alpha,\ x_3 = \beta \Rightarrow x_1 = 5\beta - 2\alpha \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 5\beta - 2\alpha \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\left.\begin{matrix} d_2 = 2 \\ m_2 = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ ne trebuie 1 vector auxiliar

$$(A - 2I_3)\cdot X' = X \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\beta - 2\alpha \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1' + 6x_2' - 15x_3' = 5\beta - 2\alpha \\ x_1' + 2x_2' - 5x_3' = \alpha \\ x_1' + 2x_2' - 5x_3' = \beta \end{cases} - \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ 3\alpha = 5\beta - 2\alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha = \beta$

Fie $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_1' + 2x_2' - 5x_3' = 1 \Rightarrow x_1' = 5x_3' - 2x_2' + 1 \Rightarrow X' = \begin{bmatrix} 5\beta' - 2\alpha' + 1 \\ \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix}$

Fie $\alpha' = 0;\ \beta' = 0 \Rightarrow X_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	RACHERIU NICOLAE	1	30113	5

J-21) (continuare)

$\alpha = 0, \beta = 1 \rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Deci, $J_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; $P = [X_1 | X_2 | X_3]$

$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \cdot 3 \\ L_3 \cdot 3 \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] L_3 + L_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] L_3 \cdot 5 L_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & +1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & +5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

$$= L_1 - \frac{1}{3} L_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] L_2 - 5L_3 =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] L_1 - \frac{1}{3} L_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = P \cdot J_A^n \cdot P^{-1}$$

$$J_A^n = \begin{bmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^n & 3n \cdot 2^{n-1} + 2^n & 5 \cdot 2^n \\ 2^n & n \cdot 2^{n-1} & 0 \\ 2^n & n \cdot 2^{n-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 3n \cdot 2^{n-1} + 2^{n+1} & -2^{n+1} + 3n \cdot 2^{n-1} + 2^{n+1} & -15n \cdot 2^{n-1} \\ n \cdot 2^{n-1} & (n+1) \cdot 2^n & -5n \cdot 2^{n-1} \\ n \cdot 2^{n-1} & (n+1) \cdot 2^n & -5n \cdot 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

J22

J-22

Să se determine forma canonică Jordan, forma canonică reală, matricele de pasaj și A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 3 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -8 \end{bmatrix}.$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Branet Tudor-Andrei	I	4	4

④ Să se determine forma canonică Jordan, forma canonică reală, matricele de pasaj și A^n, $n \in \mathbb{N}^*$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 3 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

Determinăm valorile proprii, rezolvând ecuația: $\det(A - \lambda I_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & -15 \\ 3 & 4-\lambda & -12 \\ 2 & 3 & -8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (4-\lambda)(4-\lambda)(-8-\lambda) - 9\cdot 15 - 12\cdot 12 + 30(4-\lambda) + 36(4-\lambda) - 12(-8-\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow (16 - 8\lambda + \lambda^2)(-8-\lambda) - 135 - 144 + 120 - 30\lambda + 144 - 36\lambda + 96 + 12\lambda = 0$

$\Leftrightarrow -128 - 16\lambda + 64\lambda + 64\lambda^2 - 8\lambda^2 - \lambda^3 - 279 + 120 - 30\lambda + 144 - 36\lambda + 96 + 12\lambda = 0$

$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 1 = 0 \Rightarrow -\lambda^3 = -1$

$\Rightarrow \lambda^3 = 1 \Rightarrow \lambda \in \{1, \varepsilon, \bar{\varepsilon}\}$

$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

Pentru $\lambda = 1$, $m = 1$

Rezolvăm sistemul: $(A - 1\cdot I_3)\cdot X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 15x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$$

Not $x_3 = \alpha \Rightarrow$ $3x_1 + 6x_2 = 15\alpha$
$3x_1 + 3x_2 = 12\alpha$ (-)
$3x_2 = 3\alpha \Rightarrow x_2 = \alpha$

$3x_1 = -6x_2 + 15x_3$

$\Leftrightarrow 3x_1 = -6\alpha + 15\alpha \Leftrightarrow 3x_1 = 9\alpha$

$\Rightarrow x_1 = \frac{9\alpha}{3} = 3\alpha$

$\Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 3\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$; Alegem $\alpha = 1$ $\Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Branet Tudor-Andrei	I	4	5

Pentru $\lambda = \varepsilon$, rezolvăm sistemul:

$(A - \varepsilon I_3)\cdot X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4-\varepsilon)x_1 + 6x_2 - 15x_3 = 0 \\ 3x_1 + (4-\varepsilon)x_2 - 12x_3 = 0 \quad \Big| -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - (8+\varepsilon)x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow -\varepsilon x_1 + (1 + 2\varepsilon)x_3 = 0$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}x_3 = (2+\bar{\varepsilon})x_3$

$3(2+\bar{\varepsilon})x_3 + (4-\varepsilon)x_2 - 12x_3 = 0$

$\Rightarrow (4-\varepsilon)x_2 = 3(2-\bar{\varepsilon})x_3$

$\Rightarrow x_2 = \frac{3(2-\bar{\varepsilon})}{4-\varepsilon}x_3 = \frac{3(2-\bar{\varepsilon})}{4-(\bar{\varepsilon})^2}x_3$

$= \frac{3(2-\bar{\varepsilon})}{(2-\bar{\varepsilon})(2+\bar{\varepsilon})}x_3 = \frac{3}{2+\bar{\varepsilon}}x_3$

$2 + \bar{\varepsilon} = 2 + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}$

$\frac{3}{2+\bar{\varepsilon}} = \frac{6}{3-i\sqrt{3}} = \frac{6(3+i\sqrt{3})}{12} = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow x_3 = 2$, $x_1 = 3 - i\sqrt{3}$, $x_2 = 3 + i\sqrt{3}$

$Z_2 = \begin{bmatrix} 3-i\sqrt{3} \\ 3+i\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}$

Deci $P = \begin{bmatrix} 3 & 3-i\sqrt{3} & 3+i\sqrt{3} \\ 1 & 3+i\sqrt{3} & 3-i\sqrt{3} \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow P^{(R)} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -\sqrt{3} \\ 1 & 3 & \sqrt{3} \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $J_A^{(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Bramet Tudor-Andrei	I	4	7

$$d_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3+i\sqrt{3} & 2 \end{vmatrix} = 6-3-i\sqrt{3} = 3-i\sqrt{3}$$

$$d_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3+i\sqrt{3} & 3-i\sqrt{3} \end{vmatrix} = -(9-3i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3})$$

$$= -(6-4i\sqrt{3}) = 4i\sqrt{3}-6$$

$$d_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3+i\sqrt{3} & 2 \end{vmatrix} = 2-3-i\sqrt{3} = -1-i\sqrt{3}$$

$$d_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3-i\sqrt{3} & 2 \end{vmatrix} = -(6-3+i\sqrt{3}) = -(3+i\sqrt{3}) = -3-i\sqrt{3}$$

$$d_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3-i\sqrt{3} & 3+i\sqrt{3} \end{vmatrix} = 9+3i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}$$

$$= 6+4i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow P_* = \begin{bmatrix} 4i\sqrt{3} & 4i\sqrt{3} & -12i\sqrt{3} \\ 1-i\sqrt{3} & 3-i\sqrt{3} & 4i\sqrt{3}-6 \\ -1-i\sqrt{3} & -3-i\sqrt{3} & 6+4i\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot P_* = \dots$$

J23

J-23

Să se determine forma canonică Jordan, matricea de pasaj și A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

EXAMEN	NUME ȘI PRENUME	ANUL DE STUDII	GRUPA	PAGINA
Algebră liniară și geometrie analitică (CA, Ti - ro., an 1, seria A) 18/01/2021	ȘTEFAN RĂZVAN MIHAI	I	4	1

4. $\boxed{J-6}$ $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; $J_A = ?$ $P = ?$ $A^n = ?$, $n \in \mathbb{N}^*$

Găsim valorile proprii: $\det(A - \lambda I_3) = 0$

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ -3+\lambda & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left[(1-\lambda)(5-\lambda)+4\right]$$

$$= (3-\lambda)(5-\lambda-5\lambda+\lambda^2+4)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+9) = (3-\lambda)(\lambda-3)^2$$

$(3-\lambda)(\lambda-3)^2 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$

$\Rightarrow m_1 = 3$

Pt. $\lambda = 3$ rezolvăm $(A - \lambda I_3) \cdot X = 0$

$$\iff \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ -2x_1-2x_2-2x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases} \iff x_1 = -x_2 - x_3$$

Soluție generală: $X = \begin{bmatrix} -\alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow d_1 = 2$

Avem nevoie de $m_1 - d_1 = 1$ vector auxiliar.

luăm $\alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- cu niciunul nu putem forma auxiliari.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = -\alpha-\beta \\ -2x_1-2x_2-2x_3 = \alpha \\ x_1+x_2+x_3 = \beta \end{cases} \Rightarrow -\alpha-\beta = \beta \Rightarrow \alpha = -2\beta$$

Alegem ~~$\beta = 1 \Rightarrow \beta = -2$~~ $\beta = 1 \Rightarrow \alpha = -2$

și luăm $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \to X_2'$

EXAMEN	NUME ȘI PRENUME	ANUL DE STUDII	GRUPA	PAGINA
Algebră liniară și geometrie analitică (CA, Ti - ro., an 1, seria A) 18/01/2021	ȘTEFAN RĂZVAN MIHAI	I	4	2

$$\begin{cases} x_1'+x_2'+x_3'=1 \\ -2x_1'-2x_2'-2x_3'=-2 \\ x_1'+x_2'+x_3'=1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1 - x_2 - x_3$$

Forma generală $\begin{bmatrix} 1-\alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

luăm $\alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow X_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Alegem X_3 ca primul X_2 de la pașii anterioari: $X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$P = [X_1 \mid X_2' \mid X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J_A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad A^n = P \cdot J_A^n \cdot P^{-1}$$

$$J_A^n = \begin{bmatrix} 3^n & n \cdot 3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

$P^{-1} = ?$ - transformări pe linii $[P \mid I_3]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \ominus \\ \oplus \\ \ominus \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & n \cdot 3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 3^n & n \cdot 3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-2} - 3^n \\ -2 \cdot 3^n & -2n 3^{n-1} + 3^n & -2\frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-1} + n \cdot 3^{n-1} + 3^n \\ 3^n & n \cdot 3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-2} \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA, TI - ro., an 1, seria A) 18/01/2021	NUME ȘI PRENUME	ANUL DE STUDII	GRUPA	PAGINA
	ȘTEFAN RĂZVAN MIHAI	I	4	3

$$= \begin{bmatrix} n\cdot 3^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} + 3^n & n\cdot 3^{n-1} & 3^n + n\cdot 3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 3^{n-2} - 3^n \\ -2n3^{n-1} + 3^n + n(n-1)\cdot 3^{n-2} - n\cdot 3^{n-1} - 3^n & -2n3^{n-1} + 3 & -2\cdot 3^n - 2n3^{n-1} + 3n - n(n-1)\cdot 3^{n-2} + n\cdot 3^{n-1} + 3^n \\ n\cdot 3^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}\cdot 3^{n-1} & n\cdot 3^{n-1} & 3^n + n\cdot 3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 3^{n-2} \end{bmatrix}$$

J24

J-24

Să se determine forma canonică Jordan, forma canonică reală și matricele de pasaj pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA, TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Alexandru Andrei-Denis	1	30211	4

4. Să se determine forma canonică Jordan, forma canonică reală și matricele de pasaj:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2(1-\lambda) - 2 + 0 + \lambda - 0 - \lambda = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm i.$

$\Rightarrow J_A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix}$ și $J_A^{(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Pt. $\lambda_1 = -1 \Rightarrow (A + I_3)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Luăm x_3 necunosc. secundară $\Rightarrow x_3 = \alpha$.

Avem sist. $\begin{cases} x_1 + 0\cdot x_2 = -\alpha \\ 2x_1 + x_2 = -\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -\alpha \\ x_2 = \alpha. \end{matrix}$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_{2,3} = 1 \pm i.$

$(A - (1-i)I_3)X = 0 \Leftrightarrow (A - I_3 + iI_3)X = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1+i & 0 & 1 \\ 2 & -1+i & 1 \\ 1 & -1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Fie $x_3 = \alpha \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + ix_2 + \alpha = 0 \\ x_1 - x_2 + i\cdot\alpha = 0 \end{cases} \ominus$

$\begin{cases} x_1 + ix_2 + (1-i)\alpha = 0 \\ x_1 - x_2 + i\alpha = 0 \end{cases} \ominus$

$(i-1)x_2 + (1-2i)\alpha = 0.$

$\Rightarrow x_2 = \frac{(2i-1)\alpha}{i-1}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{(2i-1)\alpha}{i-1} - i\alpha = \frac{(i-1)\alpha}{(i-1)} = \alpha$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{(2i-1)\alpha}{i-1} \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2i-1}{i-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2i^2-i-1}{-2} \\ 1 \end{pmatrix}$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Alexandru Andrei-Denis	1	30211	5

$$X = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i-3}{-2} \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\Rightarrow X_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{(\mathbb{C})} = [X_1 \mid Z_1 \mid \bar{Z}_1]$$

unde $Z_1 = X_1' + i \cdot Y_1$

$\bar{Z}_1 = X_1' - i\, Y_1$

J25

J-25

Să se determine șirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ definite prin relațiile de recurență:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 5y_n - 3z_n \\ y_{n+1} = -x_n - 3y_n - 3z_n \\ z_{n+1} = 3x_n + 15y_n + 11z_n, \ n \in \mathbb{N}, \ x_0 = 0, \ y_0 = 1, \ z_0 = -1. \end{cases}$$

Jordan

Să se determine șirurile $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n$ definite prin relațiile de recurență:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 5y_n - 3z_n \\ y_{n+1} = -x_n - 3y_n - 3z_n \\ z_{n+1} = 3x_n + 15y_n + 11z_n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},\ x_0 = 0;\ y_0 = 1;\ z_0 = -1$$

$U_{n+1} = A \cdot U_n$

$U_n = A^n \cdot U_0;\ U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 & -3 \\ -1 & -3-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 11-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2+\lambda & 0 \\ -1 & -3-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 11-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 11-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_2 + C_1}{=} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4-\lambda & -3 \\ 3 & 18 & 11-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left[(-4-\lambda)(11-\lambda) + 54\right] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) =$$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 5$

$\mu_5 = 1$

$\mu_2 = 2$

$$\lambda = 2 \begin{cases} -x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 15x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases} \qquad x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta$$

$9x_3 = -3x_1 - 15x_2$

$x_3 = \dfrac{-x_1 - 5x_2}{3} = \dfrac{-\alpha - 5\beta}{3}$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\frac{\alpha - 5\beta}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 5 \begin{cases} -4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 15x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \Big| -$$

$-4x_1 - 5x_2 - \cancel{3x_3} + x_1 + 8x_2 + \cancel{3x_3} = 0$

$-3x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

$18x_1 + 6x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -3x_1$

$$\Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad J_A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & 1 \\ -1 & -5 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^n = P \cdot J_A^n \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \cdot 2^n & -3 \cdot 2^n & -\frac{1}{3} \cdot 5^n \\ 2^n & 0 & -\frac{1}{3} \cdot 5^n \\ 0 & 2^n & 5^n \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} -5\cdot 2^n & -3\cdot 2^n & -\frac{1}{3}\cdot 5^n \\ 2^n & 0 & -\frac{1}{3}\cdot 5^n \\ 0 & 2^n & 5^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & 1 \\ -1 & -5 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}\cdot 2^n + 3\cdot 2^n - \frac{1}{3}\cdot 5^n & -\frac{40}{3}\cdot 2^n + 15\cdot 2^n - \frac{5}{3}\cdot 5^n & -5\cdot 2^n + 6\cdot 2^n - 5^n \\ \frac{1}{3}\cdot 2^n - \frac{1}{3}\cdot 5^n & \frac{8}{3}\cdot 2^n - \frac{5}{3}\cdot 5^n & 2^n - 5^n \\ -2^n + 5^n & -5\cdot 2^n + 5\cdot 5^n & -2\cdot 2^n + 3\cdot 5^n \end{bmatrix}$$

$$U_n = A^n \cdot U_0 = A^n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_n = -\frac{40}{3}\cdot 2^n + 15\cdot 2^n - \frac{5}{3}\cdot 5^n + 5\cdot 2^n - 6\cdot 2^n + 5^n \\ y_n = \frac{8}{3}\cdot 2^n - \frac{5}{3}\cdot 5^n - 2^n + 5^n \\ z_n = -5\cdot 2^n + 5\cdot 5^n + 2\cdot 2^n - 3\cdot 5^n \end{cases}$$

J26

J-26

Să se determine funcțiile derivabile $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) + 5y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = -2x(t) - y(t) + z(t) \\ z'(t) = -x(t) - y(t) + 2z(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

EXAMEN ALGEBRĂ LINIARĂ ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ (CA, TI-RO, an 1, SERIA A) 18/01/2021	NUME ȘI PRENUME	ANUL DE STUDII	GRUPA	PAGINA
	ȘERBAN ALEXANDRA	I	30215	2

J15 $x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$|A - \lambda I_3| = 0$

$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5 & -2 \\ -2 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$

$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda - 2)^3 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$\text{rang}(A - 2I_3) = 2$

$\left(\begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 2I_3\right)^3 \cdot x(t) = 0$

$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot x(t) = 0$

$\begin{pmatrix} 50 & 72 & -30 \\ -30 & -40 & 18 \\ -18 & -24 & 14 \end{pmatrix} \cdot x(t) = 0$

Baza pentru sistemul de soluții: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Celulele Jordan pentru fiecare vector propriu generalizat

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A - 2I_3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pt $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = (A - 2I_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_3 = (A - 2I_3) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ pt $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = (A - 2I_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_3 = (A - 2I_3) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pt $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A - 2I_3)^2 \cdot x = 0$ are baza pentru sistemul de soluții: $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

EXAMEN ALGEBRĂ LINIARĂ ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ (CA, TI-RO, an 1, SERIA A) 18/01/2021	NUME ȘI PRENUME	ANUL DE STUDII	GRUPA	PAGINA
	ȘERBAN ALEXANDRA	I	30215	3

J15 - continuare

1. $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = (A - 2I_3) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ - pentru $x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = (A - 2I_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ - pentru $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A - 2I_3) \cdot X = 0$ are baza pt sis. de sol. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pentru $x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

J27

J-27

Să se determine forma canonică Jordan, forma canonică reală, matricele de pasaj și A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{bmatrix}.$$

J - 28

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{bmatrix} \qquad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 7 & -3 \\ -2 & -5-\lambda & 2 \\ -4 & -10 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (-\lambda+3)\cdot(-\lambda-5)\cdot(-\lambda+3) + 7\cdot 2\cdot(-4) + (-3)\cdot(-2)\cdot(-10) - (-4)\cdot(-\lambda-5)\cdot(-3)$$
$$-(-10)\cdot 2\cdot(-\lambda+3) - (-\lambda+3)\cdot(-2)\cdot 7 = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda-1)(\lambda^2+1)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = i \quad \lambda_3 = -i.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 10x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Big|(-1) \Rightarrow -4x_2 + 7x_2 - 3x_3 = 0$$

$$3x_2 = 3x_3 \Rightarrow x_2 = x_3$$

$$\Rightarrow 2x_1 + 4x_2 = 0$$

$$x_1 = -2x_2$$

$$X = \begin{bmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ -2\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (3-i)x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + (-5-i)x_2 + 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 10x_2 + (3-i)x_3 = 0 \end{cases} \quad \Big\downarrow (\cdot -2) \Rightarrow 2(5+i)x_1 - 10x_2 - 4x_3 + (3-i)x_3 = 0$$

$$2ix_2 - x_3 - ix_3 \Rightarrow 2ix_2 - x_3(1+i) = 0$$

$$\Rightarrow 2ix_2 = x_3(1+i) \Rightarrow x_2 = \frac{(1+i)}{2i}x_3 = \frac{1-i}{2}x_3$$

$$(3-i)x_1 + \frac{7}{2}(1-i)x_3 - 3x_3 = (3-i)x_1 + \frac{1-7i}{2}x_3 = 0 \Rightarrow (3-i)x_1 = \frac{7i-1}{2}x_3$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{(7i-1)}{2(3-i)}x_3 = \frac{(3+i)(7i-1)}{2(5+i)}x_3 = \frac{20i-10}{20}x_3 \Rightarrow x_1 = \frac{10i-1}{2}x_3$$

Pentru $x_3 = 1 \Rightarrow Z_2 = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} \\ \frac{10-i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_2 = \overline{\lambda_3} \Rightarrow Z_2 = \overline{Z_3}$ respectiv $\overline{Z_2} = Z_3$

$$\Rightarrow Z_3 = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{10+i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Z_{2,3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ -2 & \frac{10-i}{2} & \frac{10+i}{2} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 5 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \qquad J_A^{(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

J28

J-28

Să se determine funcțiile derivabile $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 2y(t) + 10z(t) \\ y'(t) = -4x(t) + 4y(t) + 7z(t) \\ z'(t) = -3x(t) + y(t) + 8z(t), \quad t \in \mathbb{R},\ x(0) = 1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 0. \end{cases}$$

J.17 Să se det. funcțiile derivabile $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 2y(t) + 10z(t) \\ y'(t) = -4x(t) + 4y(t) + 7z(t) \\ z'(t) = -3x(t) + y(t) + 8z(t), \quad t \in \mathbb{R}, \ x(0)=1, y(0)=1, z(0)=0 \end{cases}$$

Fie $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 10 \\ -4 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

$X'(t) = A \cdot X(t)$ $\qquad X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$

$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$X'(t) = A \cdot X(t), \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow X(t) = e^{At} \cdot C$

$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

$X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{A \cdot 0} \cdot C = e^0 \cdot C = I_3 \cdot C = C$

$e^{A \cdot t} = P \cdot e^{J_A \cdot t} \cdot P^{-1}$

$P_1)$ $|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 10 \\ -4 & 4-\lambda & 7 \\ -3 & 1 & 8-\lambda \end{vmatrix} \downarrow \cdot 2 =$

$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -6+\lambda \\ -4 & 4-\lambda & 7 \\ -3 & 1 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & 4-\lambda & 7 \\ -3 & 1 & 8-\lambda \end{vmatrix} =$

$\leftarrow -2 \quad +$

$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & -1 \\ -3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(8 - 6\lambda + \lambda^2 + 1)$

$3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$\Delta = 36 - 36 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = 3$

$n_3 = 3$

P2) $\lambda = 3$

$$\begin{cases} -6x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 3x_1 - 5x_3$$

(2) $\Rightarrow -4x_1 + 3x_1 - 5x_3 + 7x_3 = 0$

$2x_3 = x_1$

$$\cancel{X_1 = \begin{bmatrix} 9\alpha \\ 3\alpha - \frac{5}{2}\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix}} \quad \cancel{V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \quad \cancel{X_1 =}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

P3)

$$\begin{cases} -6x_1' + 2x_2' + 10x_3' = 2 \\ -4x_1' + x_2' + 7x_3' = 1 \\ -3x_1' + x_2' + 5x_3' = 1 \end{cases} \cdot 2 \quad \Rightarrow x_2' = 1 + 3x_1' - 5x_3'$$

(2) $-4x_1' + 1 + 3x_1' - 5x_3' + 7x_3' = 1$

$2x_3' = x_1'$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2\alpha' \\ 1 + \alpha' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -6x_1'' + 2x_2'' + 10x_3'' = 0 \\ -4x_1'' + x_2'' + 7x_3'' = 1 \\ -3x_1'' + x_2'' + 5x_3'' = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2'' = 3x_1'' - 5x_3''$$

(2) $-4x_1'' + 3x_1'' - 5x_3'' + 7x_3'' - 1 = 0$

$2x_3'' - 1 = x_1''$

$$\cancel{X_3 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}} \quad X_3 = \begin{bmatrix} 2\alpha'' - 1 \\ \alpha'' - 3 \\ \alpha'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$P_4)\quad P=\begin{bmatrix}2&0&-1\\1&1&3\\1&0&0\end{bmatrix}\qquad P_5)\quad J_A=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-1&1&0&0\\1&1&3&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&-1\\1&1&3&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&-1\\1&1&3&0&1&0\\0&0&1&-1&0&2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\1&1&3&0&1&0\\0&0&1&-1&0&2\end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&3&0&1&-1\\0&0&1&-1&0&2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&3&1&-7\\0&0&1&-1&0&2\end{array}\right]$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\3&1&-7\\-1&0&2\end{bmatrix}$$

$$\cancel{P\cdot J_A}\qquad e^{J_A\cdot t}=\begin{bmatrix}e^{3t}&t\cdot e^{3t}&\frac{t^2}{2}e^{3t}\\0&e^{3t}&t\cdot e^{3t}\\0&0&e^{3t}\end{bmatrix}$$

$$e^{A\cdot t}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\1&1&3\\1&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{3t}&t\cdot e^{3t}&\frac{t^2}{2}e^{3t}\\0&e^{3t}&t\cdot e^{3t}\\0&0&e^{3t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&1\\3&1&-7\\-1&0&2\end{bmatrix}$$

$$e^{A\cdot t}=e^{3t}\begin{bmatrix}-t^2+6t+1&2t&2t^2-14t\\\frac{-t^2+4t}{2}&t+1&t^2-5t\\\frac{-t^2+6t}{2}&t&t^2-7t+1\end{bmatrix}$$

$$X(t)=e^{A\cdot t}\cdot C=e^{3t}\begin{bmatrix}-t^2+8t+1\\\frac{-t^2+6t+2}{2}\\\frac{-t^2+8t}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}x(t)=e^{3t}(-t^2+8t+1)\\y(t)=e^{3t}\cdot\left(\frac{-t^2+6t+2}{2}\right)\\z(t)=e^{3t}\left(\frac{-t^2+8t}{2}\right)\end{cases}$$

G-24, Să se det. distanța între drepte?

J-29

Să se determine șirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ definite prin relațiile de recurență:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n + z_n \\ z_{n+1} = \qquad\quad y_n + 3z_n, \ n \in \mathbb{N}, \ x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$\boxed{4)\ \text{Jordan}}$ (3.5 pag 61, [illegible]): Să se determine șirurile $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n$ definite prin relațiile de recurență

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n + z_n \\ z_{n+1} = \qquad\quad y_n + 3z_n \end{cases}$$

Fie $U_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$U_{n+1} = A \cdot U_n$, deci $U_n = A^n \cdot U_0$

1) $|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20 = -(\lambda-5)(\lambda-2)^2 =$
$= (5-\lambda)(\lambda-2)^2$

$\Rightarrow \lambda_3 = 5$, $\lambda_{1,2} = 2$; $n_5 = 1$ $n_2 = 2$

$\lambda = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = -z \end{matrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \quad X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' + y' + z' = 0 \\ 2x' + y' + z' = 1 \\ y' + z' = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \\ y' = -1 - z' \\ z' = -1 - y' \end{matrix} \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1-\alpha \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 5 \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \ (1) \\ 2x - 2y + z = 0 \ (2) \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{4\alpha}{3} \\ \frac{2\alpha}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} ; \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$J = P^{-1} \cdot A \cdot P, \quad A^n = P \cdot J \cdot P^{-1}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2^n & 3\cdot 5^n \\ -2^n & 2^n - n & 4\cdot 5^n \\ 2^n & n & 2\cdot 5^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \cancel{\begin{bmatrix} \frac{2^{n+1}+5}{3} & \frac{-2^{n+2}+6n+4\cdot 5^n}{9} & \frac{-2^{n+1}-6n+2\cdot 5^n}{9} \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2^{n+1}+5}{3} & \frac{-2^n+5^n}{3} & \frac{-2^n+5^n}{3} \\ \frac{2^{n+1}+6n+4\cdot 5^n}{9} & \frac{5\cdot 2^n - 3n + 4\cdot 5^n}{9} & \frac{2^{n-2} - 3n + 4\cdot 5^n}{9} \\ \frac{2^n - 6n + 2\cdot 5^n}{9} & \frac{2^{n-1} + 3n + 2\cdot 5^n}{9} & \frac{7\cdot 2^n + 3n + 2\cdot 5^n}{9} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n = \frac{2^{n+1}+5}{3} x_0 - \frac{2^n+5^n}{3} y_0 - \frac{2^n+5^n}{3} z_0 \\ y_n = \frac{2^{n+1}+6n+4\cdot 5^n}{9} x_0 + \frac{5\cdot 2^n - 3n + 4\cdot 5^n}{9} y_0 + \frac{2^{n-2} - 3n + 4\cdot 5^n}{9} z_0 \\ z_n = \frac{2^n - 6n + 2\cdot 5^n}{9} x_0 + \frac{2^{n-1} + 3n + 2\cdot 5^n}{9} y_0 + \frac{7\cdot 2^n + 3n + 2\cdot 5^n}{9} z_0 \end{cases}$$

30

J-30

Să se determine forma canonică Jordan, matricea de pasaj și A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

J - 11

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 2 \\ 2 & -3-\lambda & 1 \\ -4 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = (\lambda+1)^3 = 0 \Rightarrow$$

$\lambda = -1$

$(A - \lambda I_3) \cdot V = O_3$

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Rang(A) = 1. Nec principale = x_3

$x_1 = \alpha$; $x_2 = \beta \rightarrow x_3 = -2\alpha + 2\beta$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -2\alpha + 2\beta \end{cases} \qquad E(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2\alpha+2\beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E(\lambda) = \left\{ \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_2} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(A - \lambda I_3) \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$ – incompatibil. Alegem un alt vector care se comportă: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 4a - 4b + 2c = 2 \\ 2a - 2b + c = 1 \\ -4a + 4b - 2c = -2 \end{cases} \rightarrow a = \alpha;\ b = \beta \Rightarrow c = 1 - 2\alpha + 2\beta$$

$$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 - 2\alpha + 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} v_3 & u_1 & v_2 \end{array}$$

$$A^n = P \cdot J^n \cdot P^{-1}; \quad J^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1} \cdot n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P \cdot J^n = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1)^n & 2n \cdot (-1)^{n+1} & 0 \\ (-1)^n & 2 \cdot (-1)^{n+1} + 2n \cdot (-1)^{n+1} & (-1)^n \\ \frac{1}{2} \cdot (-1)^{n+1} & (-1)^n + \frac{1}{2} \cdot [(-1)^n \cdot n] & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n + 4 \cdot (-1)^{n+1} \cdot n & 4 \cdot (-1)^n \cdot n & 2 \cdot (-1)^{n+1} \cdot n \\ 2 \cdot (-1)^{n+1} \cdot n & (-1)^n + 2n \cdot (-1)^n & (-1)^{n+1} \cdot n \\ 4 \cdot (-1)^n \cdot n & 4 \cdot n \cdot (-1)^{n+1} & (-1)^n + 2n \cdot (-1)^n \end{bmatrix}$$

SPATII VECTORIALE

SV1

SV-1

Să se determine valorile proprii nenule și vectorii proprii corespunzători pentru endomorfismul

$$T : C[0, 2\pi] \to C[0, 2\pi], \quad T(f)(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x + y) f(y) dy, \ \forall\, x \in [0, 2\pi].$$

SV2

SV-2

Să se arate că polinoamele lui Hermite $H_n(x) = e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$ sunt vectori proprii pentru endomorfismul

$$T : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad T(f)(x) = 2x f'(x) - f''(x).$$

SV3

SV-3

Să se arate că polinoamele lui Legendre $P_n(x) = [(x^2 - 1)^n]^{(n)}$ sunt vectori proprii pentru endomorfismul

$$T : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad T(f)(x) = (x^2 - 1) f''(x) + 2x f'(x).$$

SV4

SV-4

În spațiul vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideră planul $P: \ x + y + z = 0$ și dreapta $D: \ x = y = z$. Să se arate că $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ și să se determine proiecția pe P paralelă cu D.

SV5

SV-5

Să se determine valorile proprii și vectorii proprii pentru endomorfismul

$$T : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad T(f)(x) = f(x + 1) - f(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

SV6

SV-6

Să se arate că grupul $(\mathbb{R}, \oplus)$, unde $x \oplus y = x + y - a$ este spațiu vectorial peste corpul $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, unde produsul cu scalari este definit prin $\varphi(\alpha, x) = \alpha \cdot x + (1 - \alpha)a$, unde $a \in \mathbb{R}$ este fixat.

SV7

SV-7

Să se determine valorile proprii nenule și vectorii proprii corespunzători pentru endomorfismul

$$T : C[-\pi, \pi] \to C[-\pi, \pi], \quad T(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (2x \cos y + \sin x \sin y) f(y) dy, \ \forall\, x \in [-\pi, \pi].$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	POPA IOANA-ANDREEA	I	30111	7

S.V.-7 Să se determine valorile proprii nenule și vectorii proprii corespunzători pentru endomorfismul

$T: C[-\pi,\pi] \to C[-\pi,\pi]$

$T(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (2x\cos y + \sin x \sin y) f(y)\, dy,$

$\forall x \in [-\pi,\pi].$

Soluție:

$T(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (2x\cos y + \sin x \sin y) f(y)\, dy =$

$= 2x \int_{-\pi}^{\pi} \cos y\, f(y)\, dy + \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin y\, f(y)\, dy =$

Notăm $\int_{-\pi}^{\pi} \cos y\, f(y) dy = af$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin y\, f(y) dy = bf$

$\Rightarrow g(x) = af \cdot 2x + bf \cdot \sin x$

$T(f) = \lambda f, \ f \neq 0$

$\Rightarrow af \cdot 2x + bf \cdot \sin x = \lambda(ax + b\sin x), \ x \in [-\pi,\pi]$

$af = \lambda a$

$bf = \lambda b$

$\Rightarrow af = \int_{-\pi}^{\pi} \cos y (ay + b\sin y)\, dy =$

$= \sin y (ay + b\sin y) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \sin y (a + b\cos y) dy =$

$= \cos y (a + b\cos y) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos y \cdot b \cdot \sin y\, dy =$

$= -(a-b) - (a+b) + \frac{\sin^2 y \cdot b}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} =$

$= -\cancel{a} + \cancel{b} - \cancel{a} - \cancel{b} + 0 = 0$

$bf = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y (ay + b\sin y) dy =$

$= -\cos y (ay + b\sin y) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos y (ay + b\cos y) dy$

$= \cancel{ay}\ a\pi + a\pi + \sin y (a + b\cos y) \Big|_{-\pi}^{\pi} + b\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 y\, dy$

$= 2\pi - b \frac{\cos^2 y}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2a\pi - 0 = 2a\pi$

Deci $\begin{cases} -2a = \lambda a \\ 2a\pi = \lambda b \end{cases}$; $\lambda = -2 \Rightarrow \begin{matrix} 2a\pi = -2b \\ a\pi = -b \end{matrix}$

SV8

SV-8

Să se determine valorile proprii și vectorii proprii pentru endomorfismul

$$T : C[0, \infty) \to C[0, \infty), \quad T(f) = F,$$

unde F este primitiva lui F cu proprietatea $F(0) = 0$.

SV9

SV-9

Să se determine valorile proprii nenule și vectorii proprii corespunzători pentru endomorfismul

$$T : C[-1,1] \to C[-1,1], \quad T(f)(x) = \int_{-1}^{1} (3xy + 10x^2y^2) f(y)dy, \ \forall\, x \in [-1,1].$$

SV10

SV-10

Să se determine perechile de numere naturale (n, m) pentru care grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ poate fi organizat ca spațiu vectorial peste $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Mureșan George	1	3	9

SV-10 Să se determine perechile de nr. naturale (n,m) pentru care grupul $(\mathbb{Z}_n,+)$ poate fi organizat ca spațiu vectorial pentru $(\mathbb{Z}_m,+,\cdot)$.

Luăm operația externă $\circ : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$

$\bar{x}$ - clasa modulo n

$\hat{y}$ - clasa modulo m

$m = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \dots + \bar{1} =$

$= \hat{1} \circ \bar{1} + \hat{1} \circ \bar{1} + \dots + \hat{1} \circ \bar{1}$

$= (\hat{1} + \hat{1} + \dots + \hat{1}) \circ \bar{1} = m \circ \bar{1} = \bar{0} \Rightarrow$

$\bar{m} = \bar{0} \Rightarrow m \vdots n \Rightarrow m = k \cdot n$, $k \in \mathbb{N}$

Deci perechile sunt (n, kn)

SV11

SV-11

Să se determine valorile proprii și vectorii proprii pentru endomorfismul

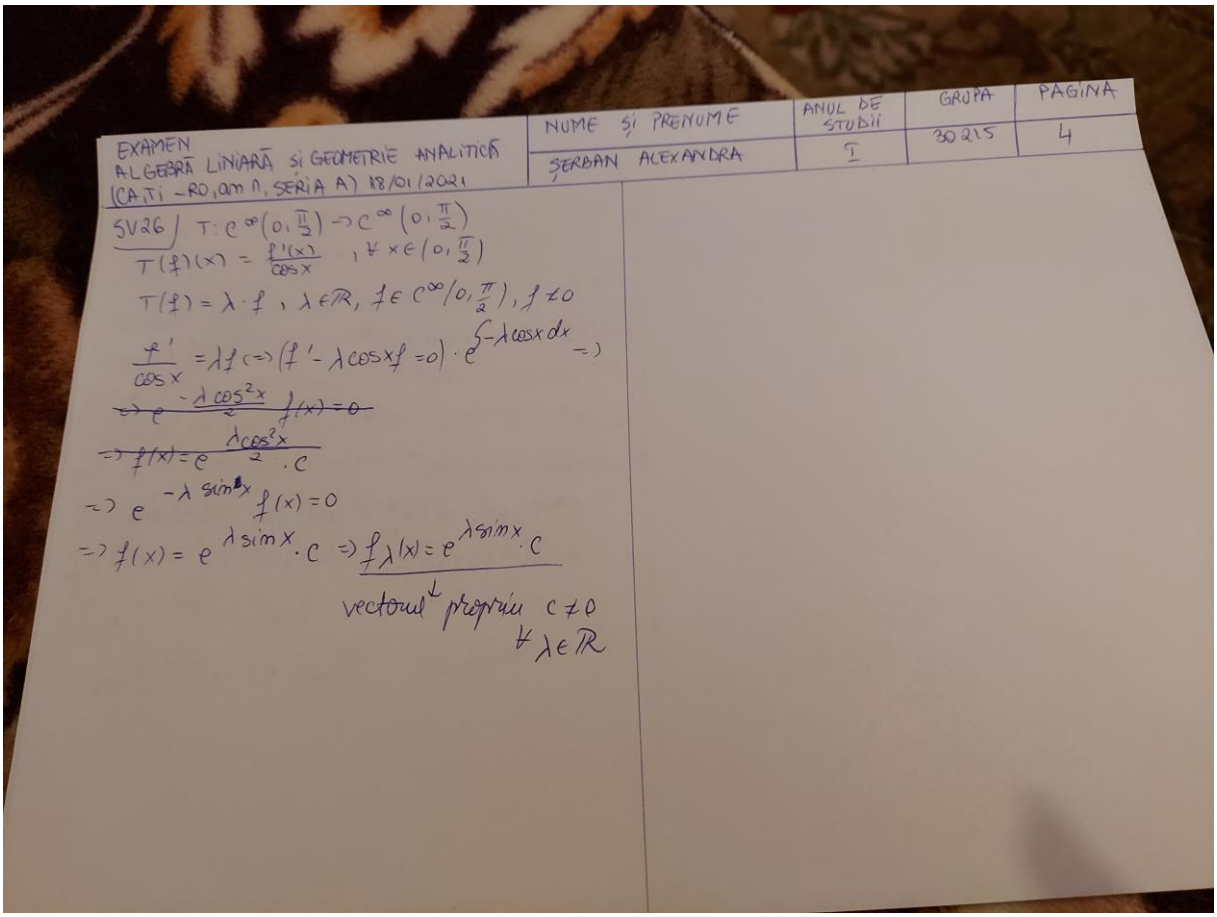
$$T : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad T(f)(x) = f'(x) - f(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

SV12

SV-12

Să se determine valorile proprii și vectorii proprii pentru endomorfismul

$$T : C^\infty\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to C^\infty\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad T(f)(x) = \frac{f'(x)}{\cos x}, \ \forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$



EXAMEN ALGEBRĂ LINIARĂ și GEOMETRIE ANALITICĂ (CA, TI - RO, am n, SERIA A) 18/01/2021	NUME ȘI PRENUME	ANUL DE STUDII	GRUPA	PAGINA
	ȘERBAN ALEXANDRA	I	30215	4

SV26 / $T: C^\infty(0, \frac{\pi}{2}) \to C^\infty(0, \frac{\pi}{2})$

$T(f)(x) = \frac{f'(x)}{\cos x}, \ \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$T(f) = \lambda \cdot f, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ f \in C^\infty(0, \frac{\pi}{2}), \ f \neq 0$

$\frac{f'}{\cos x} = \lambda f \Leftrightarrow (f' - \lambda \cos x f = 0) \cdot e^{\int -\lambda \cos x \, dx} \Rightarrow$

$\cancel{\Rightarrow e^{-\frac{\lambda \cos^2 x}{2}} f(x) = 0}$

$\cancel{\Rightarrow f(x) = e^{\frac{\lambda \cos^2 x}{2}} \cdot C}$

$\Rightarrow e^{-\lambda \sin x} f(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = e^{\lambda \sin x} \cdot C \Rightarrow \underline{f_\lambda(x) = e^{\lambda \sin x} \cdot C}$

vectorul propriu $C \neq 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

SV13

SV-13

Poate fi organizat grupul $(\mathbb{Q}, +)$ ca spațiu vectorial peste corpul $(\mathbb{R}, +, \cdot)$?

SV14

SV-14

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea $A^n = 0$ și $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ o coloană pentru care $A^{n-1} \cdot C \neq 0$. Să se arate că matricea cu coloanele $C, A \cdot C, A^2 \cdot C, \ldots, A^{n-1} \cdot C$ este inversabilă.

SV15

SV-15

Să se arate că grupul $((0,\infty),\cdot)$ este spațiu vectorial peste corpul $(\mathbb{R},+,\cdot)$, unde produsul cu scalari este definit prin

$$\varphi : \mathbb{R}\times(0,\infty)\to(0,\infty), \quad \varphi(\alpha,x)=x^{\alpha},\ \forall\, x>0,\ \forall\, \alpha\in\mathbb{R}.$$

Să se determine dimensiunea sa.

SV16

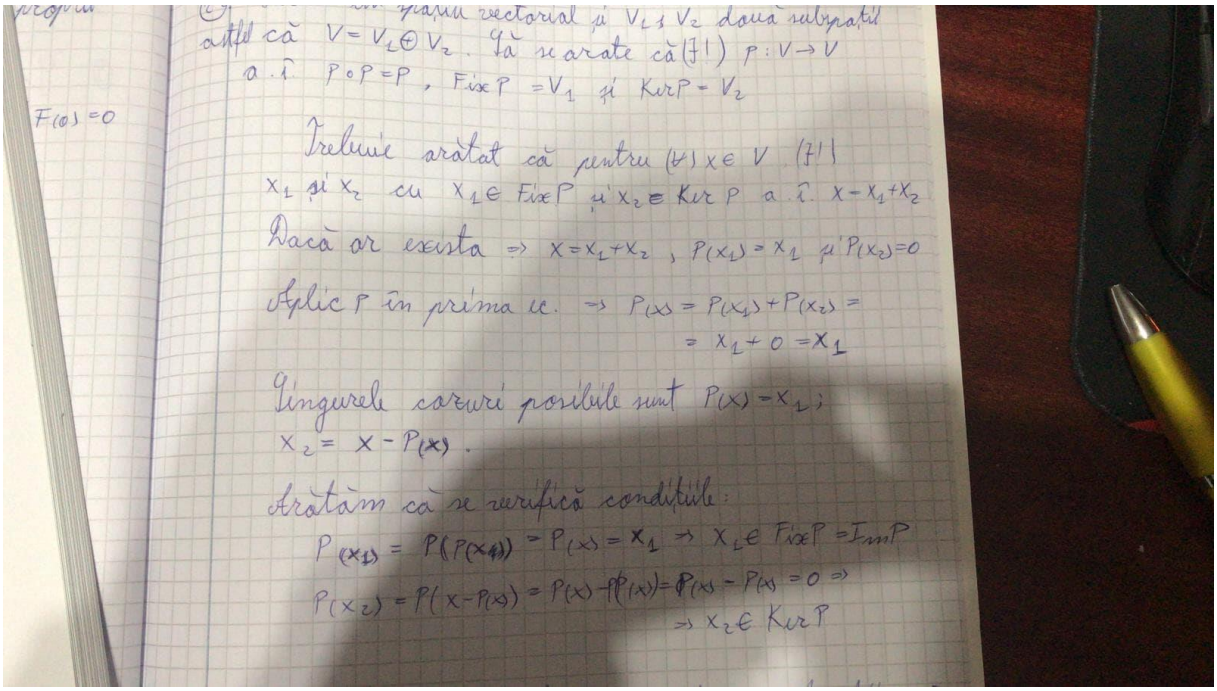
SV-16

Să se determine aplicațiile liniare $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ cu proprietatea $\mathrm{Ker}T=\mathrm{Im}T$.

SV17

SV-17

Fie V un spațiu vectorial și V_1, V_2 două subspații astfel ca $V=V_1\oplus V_2$.
Să se arate că există o unică aplicație liniară $P:V\to V$ astfel ca $P\circ P=P$, $\mathrm{Fix}P=V_1$ și $\mathrm{Ker}P=V_2$.



SV18

SV-18

Să se determine valorile proprii nenule și vectorii proprii pentru endomorfismul

$$T: C\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to C\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \quad T(f)(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(y\sin x+2\cos y)f(y)dy,\ \forall\, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

EXAMEN ALGEBRĂ LINIARĂ ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ AU IR, an 1, sem A 22/01/2021	NUME și PRENUME	AN DE STUDII	GRUPA	PAGINA
	CHENDEȘ REBECA ALINA	1	2 30112	6

SV -18.

Valorile proprii și vectorii proprii pentru endomorfismul

$T: C[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to C[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\underbrace{T(f)}_{g}(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (y \sin x + 2\cos y) f(y)\, dy \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y \sin x \cdot f(y)\, dy + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y \cdot f(y)\, dy$

$= \sin x \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y f(y)\, dy}_{a)} + 2\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y\, f(y)\, dy}_{b)}$

$\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Span}\{\sin x, 2\}$

$T(f) = \lambda f \to \lambda = 0 \Rightarrow f \in \operatorname{Ker} T$

$\boxed{\lambda \neq 0} \Rightarrow f \in \operatorname{Im} T$

$\Rightarrow f(x) = a \sin x + 2b$

$a) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y(a \sin y + 2b)\, dy = 2a$

$b) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y\,(a \sin y + 2b) = 4b.$

$Tf = \lambda f \Leftrightarrow 2a \sin x + 8b = \lambda(a \sin x + b).$

pentru $x = 0 \Rightarrow 8b = \lambda b \Rightarrow \lambda = 8$

pentru $x = 1 \Rightarrow 2a + 8b = a\lambda + b$

$\lambda = \frac{2a + 7b}{a}$

$T(\sin) = 2\sin(x)$

$T(2) = 8.$

$M_T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

$\det(M_T - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)(8-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 8$ - valorile proprii menute.

SV19

SV-19

Să se determine toate polinoamele $f \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

EXAMEN	Numele și prenumele	Anul de studii	Grupa	Pagina
Algebră liniară și geometrie analitică (CA, TI - RO, an 1, serie A) 18/01/2021	Tivadar Maria Simona	1	30213	5

SV 10

Să se det toate polinoamele $f \in \mathbb{R}[x]$ cu proprietatea că $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

$B.\mathbb{Z} = \{1, \frac{x}{1!}, \frac{x(x-1)}{2!}, \dots, \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{n!}\}$

$f(x) = a_0 + a_1 \cdot \frac{x}{1!} + a_2 \cdot \frac{x(x-1)}{2!} + \dots + a_n \cdot \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{n!}\}$

pt $x=0 \Rightarrow f(0) = a_0 \in \mathbb{Z}$

pt $x=1 \Rightarrow f(1) = a_0 + a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1 \in \mathbb{Z}$

$\vdots$

pt $x=n \Rightarrow f(n) = a_0 + a_1 \cdot C_n^1 + a_2 \cdot C_n^2 + \dots + C_n^n \cdot a_n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a_n \in \mathbb{Z}$ (ușor de prin inducție)..

$\Rightarrow f(x) = a_0 + a_1 \cdot \frac{x}{1!} + a_2 \cdot \frac{x(x-1)}{2!} + \dots + a_n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$

unde $[a_i]_{i=\overline{1,n}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{Z} \ \forall x \in \mathbb{Z}$

iar $f(k) = a_0 + a_1 \frac{k}{1!} + a_2 \cdot \frac{k(k-1)}{2!} + \dots + a_n \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} \in \mathbb{Z}$

este adev, deoarece $f \mid k!$ (se divide)

$\Rightarrow$ Polinoamele $f \in \mathbb{R}[x]$ cu $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ sunt cele ce au coeficienți nr întregi în $B.\mathbb{Z}$

SV20

SV-20

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $S_{a,b} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1},\ n \geq 1\}$.
Să se arate că $(S_{a,b}, +)$ este spațiu vectorial real, să se determine dimensiunea lui și o bază.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Bramet Tudor-Andrei	I	4	8

5) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $S_{a,b} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}, n \geq 1\}$

Să se arate că $(S_{a,b}, +)$ sp vectorial real, să se det dim lui și o bază.

$(S_{a,b}, +)$ sp vectorial $\Leftrightarrow$

I. $(S_{a,b}, +)$ - grup comutativ

II. 1. $\alpha(u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$

2. $(\alpha+\beta) \cdot u = \alpha u + \beta u$

3. $\alpha(\beta + u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$

4. $1 \cdot u = u$

u și v = vectori din $(S_{a,b})$, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Considerăm $x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}$ și $x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n$, $n \geq 1$ 2 vectori.

1. $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

$\Leftrightarrow \alpha(x_{n+1} + x_{n+2}) = \alpha x_{n+1} + \alpha x_{n+2}$

$\Rightarrow \alpha[a(x_n + x_{n+1}) + b(x_n + x_{n-1})]$

$= \alpha[a x_n + b x_{n-1}] + \alpha(a x_{n+1} + b x_n)$

$\Leftrightarrow \alpha a x_n + \alpha a x_{n+1} + \alpha b x_n + \alpha b x_{n-1}$

$= \alpha a x_n + \alpha b x_{n-1} + \alpha a x_{n+1} + \alpha b x_n$ (A)

2. $(\alpha+\beta) \cdot x_{n+1} = \alpha x_{n+1} + \beta x_{n+1}$

$(\alpha+\beta)(a x_n + b x_{n-1}) = \alpha a x_n + \alpha b x_{n-1} + \beta a x_n + \beta b x_{n-1}$ (*)

$\cdot\ \alpha \cdot x_{n+1} + \beta x_{n+1} = \alpha(a x_n + b x_{n-1}) + \beta(a x_n + b x_{n-1}) = \alpha a x_n + \alpha b x_{n-1} + \beta a x_n + \beta b x_{n-1}$ (**)

Din (*) și (**) $\Rightarrow$ (A)

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	Bramet Tudor-Andrei	I	4	9

3. $\alpha(\beta \cdot x_{n+1}) = (\alpha\beta) x_{n+1}$

$\cdot\ \alpha(\beta \cdot x_{n+1}) = \alpha[\beta(a x_n + b x_{n-1})]$

$= \alpha(\beta a x_n + \beta b x_{n-1}) = \alpha\beta a x_n + \alpha\beta b \cdot x_{n-1}$ (*)

$\cdot\ (\alpha\beta) \cdot x_{n+1} = (\alpha\beta)(a x_n + b x_{n-1})$

$= \alpha\beta a x_n + \alpha\beta b x_{n-1}$ (**)

Din (*) și (**) $\Rightarrow$ 3 adevărat

4. $1 \cdot x_{n+1} = x_{n+1}$

De la 3) am dem că $\alpha(\beta x_{n+1}) = (\alpha\beta) x_{n+1}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Fie $\alpha = 1$ și $\beta = 1 \Rightarrow 1(1 \cdot x_{n+1}) = (1 \cdot 1) x_{n+1}$

$\Leftrightarrow 1 \cdot x_{n+1} = x_{n+1}$ (A)

SV-21

Să se determine valorile proprii nenule și vectorii proprii corespunzători pentru endomorfismul

$$T : C[-1,1] \to C[-1,1], \quad T(f)(x) = \int_{-1}^{1} \left[10(xy)^{\frac{1}{3}} + 7(xy)^{\frac{2}{3}}\right] f(y)dy, \ \forall\, x \in [-1,1].$$

SV22

SV-22

Să se determine valorile proprii ale endomorfismului

$$T : C[0,2\pi] \to C[0,2\pi], \quad T(f)(x) = \int_{0}^{2\pi} \sin(x+2y) f(y)dy, \ x \in [0,2\pi].$$

SV23

SV-23

Fie $\mathcal{F} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un șir de polinoame, $f_n \in \mathbb{R}[X]$ astfel ca $\operatorname{grad} f_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ și $f_0 \neq 0$. Să se arate că $\mathcal{F}$ formează o bază a lui $\mathbb{R}[X]$ peste $\mathbb{R}$.

SV24

SV-24

Fie V un spațiu vectorial real și V_1, V_2 două subspații astfel ca $V = V_1 \oplus V_2$.
Să se arate că există o unică aplicație liniară $S : V \to V$ astfel ca $S \circ S = I$, $\operatorname{Fix} S = V_1$ și $\operatorname{Inv} S = V_2$.

SV25

SV-25

Să se determine valorile proprii și vectorii proprii pentru endomorfismul

$$T : C^{\infty}(0,\infty) \to C^{\infty}(0,\infty), \quad T(f)(x) = \frac{f'(x)}{x^2}, \ \forall\, x > 0.$$

J-24. Fie $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Atunci $e^A = \begin{pmatrix} e^5 & e^{-3} & e^2 \\ e^6 & e^{-4} & e^4 \\ e^4 & e^{-4} & e^5 \end{pmatrix}$ și

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}A\right) = \begin{pmatrix} \sin\frac{5\pi}{6} & \sin\left(-\frac{3\pi}{6}\right) & \sin\frac{2\pi}{6} \\ \sin\frac{6\pi}{6} & \sin\left(-\frac{4\pi}{6}\right) & \sin\frac{4\pi}{6} \\ \sin\frac{4\pi}{6} & \sin\left(-\frac{4\pi}{6}\right) & \sin\frac{5\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{6} & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\pi & \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

SV-24. $T: C^0(0,\infty) \to C^0(0,\infty)$ $T(f(x)) = \frac{f'x}{x^2}$ $\forall x > 0$

Fie λ o valoare proprie arbitrară a endomorfismului T. Atunci $\lambda \neq 0$ și dacă y - vector propriu corespunzător acestei valori

Atunci $T(y) = \lambda y \iff \frac{y'}{x^2} = \lambda y \iff$

$\frac{dy}{dx} = \lambda x^2 y \;\Big|\cdot \frac{dx}{y} \iff \frac{dy}{y} = \lambda x^2 dx \iff$

$\int \frac{dy}{y} = \int \lambda x^2 dx \iff \ln|y| = \frac{\lambda x^3}{3} + c$

$|y| = e^{\frac{\lambda x^3}{3} + c}$ $\quad |y| = e^c \cdot e^{\frac{1}{3}\lambda x^3}$

Luăm $c = 0 \Rightarrow |y| = e^{\frac{1}{3}\lambda x^3} \iff y = \pm e^{\frac{1}{3}\lambda x^3}$

Deci valorile proprii ale endomorfismului T sunt numerele reale diferite de zero adică $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Fiecărei valori proprii λ îi corespunde vectorul propriu

$$y = e^{\frac{1}{3}\lambda x^3}$$

SV26

SV-26

Fie V un spațiu vectorial real și $T : V \to V$ un endomorfism cu proprietatea $T^3 = T$. Să se arate că

$$V = \mathrm{Fix}T \oplus \mathrm{Inv}T \oplus \mathrm{Ker}T.$$

SV27

SV-27

În spațiul vectorial $\mathbb{R}^3$ considerăm dreptele

$$D_1 : \ x = y = z, \quad D_2 : \ x = 2y = 3z, \quad D_3 : \ \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}.$$

Să se determine condițiile în care $\mathbb{R}^3 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$.

$P(\varepsilon_0) = P(1) = \frac{n(n+1)}{2}$. $\quad (1+x+\dots+x^n)' = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)', \; x \neq 1$

S V-11 În spațiul vectorial $\mathbb{R}^3$ considerăm dreptele

$\Delta_1 : x = y = z \qquad \Delta_2 : x = 2y = 3z \qquad \Delta_3 = \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$

Să se determine condițiile în $\mathbb{R}^3 = \Delta_1 \oplus \Delta_2 \oplus \Delta_3$

$d_1 : (1; 1; 1)$

$d_2 : \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$

$d_3 : (\alpha; \beta; \gamma)$

$d : \left(2+\alpha; \overset{2/}{1+\frac{1}{2}} + \beta; \overset{3/}{1+\frac{1}{3}} + \gamma\right), d : \left(2+\alpha; \frac{3}{2}\beta; \frac{4}{3}\gamma\right)$

$\cancel{2+\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -2}$

$\cancel{\frac{3}{2} + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{3}{2}}$

$\cancel{\frac{4}{3} + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{4}{3}}$

$(x_0; y_0; z_0) = (1; 1; 1) + \left(1+\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) + (\alpha; \beta; \gamma)$

$(x_0; y_0; z_0) = \left(2+\alpha; \frac{3}{2}\beta; \frac{4}{3}+\gamma\right)$

aleg $(0; 0; 0) = \left(2+\alpha; \frac{3}{2}+\beta; \frac{4}{3}+\gamma\right)$

$2+\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -2$

$\frac{3}{2} + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{3}{2}$ $\qquad \Rightarrow \left(-2; -\frac{3}{2}; -\frac{4}{3}\right) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{4}{3} + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{4}{3}$

SV28

SV-28

Poate fi organizat grupul $(\mathbb{Q}, +)$ ca spațiu vectorial peste corpul $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$? (p număr prim).

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	VIȘA DANIEL NICOLAE	1	30113	8

SV. 28 Poate fi organizat grupul $(Q,+)$ ca spațiu vectorial peste corpul $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$? (p număr prim)

Soluție

Dacă $(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p, \cdot\, p)$ este spațiu vectorial.

$\Rightarrow (Q_n,+)$ este spațiu vectorial peste corpul $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$

not clasele modulo n cu $\bar{x}$
p cu $\bar{y}$

avem $\bar{p} = p(\hat{1}, \bar{p}) = p(\hat{1}, \bar{1} + \dots + \bar{1}) = p(\hat{1}, \bar{1}) + \dots$
$\dots + p(\hat{1}, \bar{1}) = p(\hat{1} + \dots + \hat{1}, \bar{1}) = p(\hat{p}, \bar{1}) =$
$= p(\hat{0}, \bar{1}) = \bar{0}$

$\Rightarrow \bar{p} = \bar{0} \pmod{n}$

$\Rightarrow p$ este divizibil cu n

$\Rightarrow$ singura soluție este pentru $p = n$

$\Rightarrow$ răspunsul este DA pt $p = n$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	TRIFU RARES ALEXANDRU	1	30112	8

5) SV-28

Poate fi organizat grupul $(Q,+)$ ca spațiu vectorial peste corpul $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$? (p - număr prim)

O extensie a lui Q: $(Q,+)$ - grup poate fi gândită ca spațiu vectorial peste $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ → definirea adunării vectorilor ca adunare a corpului și multiplicarea (înmulțirea) scalarilor din $\mathbb{Z}_p$ ca fiind multiplicare din Q și astfel ignorând multiplicarea corpului. Dimensiunea lui $Q(\alpha)$ peste $\mathbb{Z}_p$ depinde de α. Dacă se satisface ecuația polinomială:

$q_n \alpha^n + q_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \dots + q_0 \cdot \alpha^0 = 0$

unde $q_n, \dots, q_0$ - coeficienți raționali

Dacă α este algebric $\Rightarrow$ dimensiune finită

Dacă α nu este algebric $\Rightarrow$ dimensiune infinită

De exemplu: pt $\alpha = \pi$ nu există ecuații, deci π este transcendent

SV29

SV-29

În spațiul vectorial $\mathbb{R}^2$ să se determine endomorfismul de simetrie față de dreapta D_1 : $x + 2y = 0$, paralelă cu dreapta D_2 : $2x + y = 0$.

SV30

SV-30

Să se arate că $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$, unde

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

SPATII EUCLIDIENE

SE1

SE-1

Fie X, Y spații euclidiene și $T : X \to Y$ un operator liniar care admite adjunct. Să se arate că operatorul $T^* \circ T$ este autoadjunct, are valori proprii reale și $\mathrm{Ker}(T^* \circ T) = \mathrm{Ker}T$.

SE2

SE-2

În spațiul euclidian $\mathbb{R}^4$ să se determine distanța de la punctul $A(1, -1, 0, 2)$ la planul $P : \ x_1 = x_2, \ x_3 = x_4$.

$$\cancel{A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 10 \\ -4 & 2 & 7 \\ -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}}$$

SE-1

$A(1,-1,0,2)$ $\qquad P: \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

$d(A,P) = ?$

Sistemul de ecuații care definește P are soluția generală

$(\alpha, \alpha, \beta, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

sau $\alpha(1,1,0,0) + \beta(0,0,1,1)$.

Notăm $e_1 = (1,1,0,0)$, $e_2 = (0,0,1,1)$.

$$d(A,P) = \sqrt{\frac{G(e_1, e_2, A)}{G(e_1, e_2)}}$$

$$G(e_1, e_2, A) = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_1, A \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \langle e_2, A \rangle \\ \langle A, e_1 \rangle & \langle A, e_2 \rangle & \langle A, A \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$\langle e_1, e_1 \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2$

$\langle e_1, e_2 \rangle = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$

$\langle e_1, A \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0$

$\langle e_2, e_1 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle = 0$

$\langle e_2, e_2 \rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$

$\langle e_2, A \rangle = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$

$\langle A, e_1 \rangle = \langle e_1, A \rangle = 0$

$\langle A, e_2 \rangle = \langle e_2, A \rangle = 2$

$\langle A, A \rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 1 + 1 + 4 = 6$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2(12-4) = 2 \cdot 8 = 16$$

$$G(e_1,e_2) = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$d(A,P) = \sqrt{\frac{G(e_1,e_2,A)}{G(e_1,e_2)}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$$

SE3

SE-3

În spațiul euclidian $\mathbb{R}^3$ să se determine operatorul de proiecție pe planul

$$(\pi): \ x + y + z = 0,$$

paralel cu dreapta $D: \ x = 2y = 3z$ și adjunctul său.

SE4

SE-4

Fie $A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice simetrică pozitiv definită. Să se arate că pentru orice $k < n$ matricea cu liniile $i_1, i_2, \ldots, i_k$ și coloanele $i_1, i_2, \ldots, i_k$ este pozitiv definită.

SE5

SE-5

Să se determine valoarea minimă a integralei

$$\int_0^{2\pi} (a_0 + a_1 \cos^2 x + a_2 \cos^4 x + \ldots + a_n \cos^{2n} x + \cos^{2n+2} x)^2 dx,$$

pentru $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ arbitrare.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	TRIFU RARES ALEXANDRU	1	30112	4

3) SE-5

Să se determine valoarea minimă a integralei

$\int_0^{2\pi} (a_0 + a_1 \cos^2 x + a_2 \cos^4 x + \ldots + a_n \cos^{2n} x + \cos^{2n+2} x)^2 dx$

pentru $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ arbitrare

Fie $f(a_1, \ldots, a_n) = \int_0^{2\pi} (a_0 + a_1 \cos^2 x + a_2 \cos^4 x + \ldots + a_n \cos^{2n} x + \cos^{2n+2} x)^2 dx$

$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx$

$f(a_1, \ldots, a_n) = d^2 \cos^{2n+2} x, \mathrm{Span}\{\cos^{2n} x, \cos^{2(n-1)} x, \ldots, 1\}$

Dar $\mathrm{Span}\{\cos^{2n} x, \cos^{2(n-1)} x, \ldots, 1\} = \mathrm{Span}\{\cos 2(n-1) \cdot x, \ldots, 1\}$

$\cos^n x = \left[\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right]^n = \frac{1}{2^n}\left[C_n^0 (z^n + \bar{z}^n) + \ldots\right]$

$= \frac{1}{2^n}\left[C_n^n 2 \cos nx + C_n^1 2 \cos(n-2)x + \ldots\right]$,

unde ~~$z = \cos x + i \sin x$~~ $z = \cos x + i \cdot \sin x$

$d^2(\cos^{2n} x, \mathrm{Span}\{\cos 2(n-1)x, \ldots, 1\} =$

$= d^2\left(\frac{1}{2^{2(n-1)}} \cdot \cos 2nx, \mathrm{Span}\{\cos 2(n-1)x, \ldots, 1\}\right.$

$= \frac{\cancel{2\pi^{2n}} \cdot \frac{1}{2^{4(n-1)}} \cdot \pi}{\cancel{2\pi^{2n}}} = \frac{\pi}{16^{n-1}}$

SE6

SE-6

În spațiul euclidian $\mathbb{R}[X]$ definim produsul scalar $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) g(x) dx$.

Să se arate că polinoamele $f_n(x) = e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, formează o bază ortogonală. Să se determine o bază ortonormată știind că $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

SE7

SE-7

În spațiul euclidian $(\mathbb{R}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, unde $\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) g(x) dx$, să se arate că polinoamele $P_n(x) = e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, formează o bază ortogonală. Să se determine o bază ortonormată.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	RACHERIU NICOLAE	1	30113	6

SE-7) $(\mathbb{R}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty e^{-x} f(x) g(x)\, dx$

$P_n(x) = e^x (x^n \cdot e^{-x})^{(n)}$

$P_n(x) = e^x (n x^{n-1} e^{-x} - e^{-x} x^n)^{(n-1)}$

$P_n(x) = e^x [e^{-x}(-x^n + n x^{n-1})]^{(n-2)}$

$P_n(x) = e^x (-e^{-x}(-x^n + n x^{n-1}) + e^{-x}(-n x^{n-1} + n(n-1) x^{n-2}))^{(n-3)}$

Derivăm de n ori și obținem

$P_n(x) = e^x (-1)^n (e^{-x}(x^n + \dots)) = (-1)(x^n + \dots) \to$

$\Rightarrow P_n(x)$ - polinom de grad n

$\langle P_m, P_n \rangle = \int_0^\infty e^{-x} P_m P_n\, dx = \int_0^\infty e^{-x} P_m(x) \cdot e^x (x^n e^{-x})^{(n)} dx$

$= \int_0^\infty P_m(x) (x^n \cdot e^{-x})^{(n)} dx = P_m(x)(x^n e^{-x})^{(n-1)} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty P_m'(x)$

$(x^n e^{-x})^{(n-1)} dx - P_m'(x)(x^n e^{-x})^{(n-2)} + \int_0^\infty P_m''(x)(x^n e^{-x})^{(n-2)} dx$

Aplicăm de n ori integrarea prin părți

$\Rightarrow (-1)^n \int_0^\infty P_m^{(n)}(x) (x^n e^{-x})^{(n-2)} dx \Big| \to$

$m > n \to P_m^{(n)}(x) = 0$

$\to \langle P_m, P_n \rangle = 0 \to$ ortogonale

S-V-7) P $x+y+z=0$

Δ: $x=y=z$

$\mathbb{R}^3 = P \oplus \Delta$

$\mathbb{R}^3 = P \oplus \Delta \Leftrightarrow P \cap \Delta = \{0\}$

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x=y=z \end{cases} \to x=y=z=0 \to P \cap \Delta = \{0\}$

SE8

SE-8

În planul euclidian $\mathbb{R}^2$ să se determine operatorul de proiecție pe dreapta

$$D_1 : \ x + 2y = 0, \ \text{paralelă cu } D_2 : \ 2x + y = 0$$

și adjunctul său.

SE9

SE-9

În spațiul euclidian $\mathbb{R}^4$ să se determine distanța de la dreapta

$$D = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4 + 1\}$$

la planul $P = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 0, \ x_3 + x_4 = 0\}$.

$G(e_1,e_2) = \begin{vmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,e_2\rangle \\ \langle e_2,e_1\rangle & \langle e_2,e_2\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$d(A,P) = \sqrt{\frac{G(e_1,e_2,A)}{G(e_1,e_2)}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$$

SE-9

$D = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4 + 1\}$

$P = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$

$d(D,P) = ?$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \alpha - 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Sistemul de ecuații care definește D are soluția generală $(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha-1), \alpha \in \mathbb{R}$ sau

$(0,0,0,-1) + \alpha(1,1,1,1)$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_4 = -x_3 \end{cases} \text{Notăm } x_1 = \alpha, x_3 = \beta \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = -\beta \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sistemul de ecuații care definește P are soluția generală $(\alpha,-\alpha,\beta,-\beta), \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ sau

$\alpha(1,-1,0,0) + \beta(0,0,1,-1)$.

Notăm $e_1 = (1,1,1,1)$, $e_2 = (1,-1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,-1)$

Notăm $e_2 + e_3 = a = (1,-1,1,-1)$.

$$d(D,P) = \sqrt{\frac{G(v,e_1,e_2+e_3)}{G(e_1,e_2,e_3)}}$$

$$G(v,e_1,a) = \begin{vmatrix} \langle v,v\rangle & \langle v,e_1\rangle & \langle v,a\rangle \\ \langle e_1,v\rangle & \langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,a\rangle \\ \langle a,v\rangle & \langle a,e_1\rangle & \langle a,a\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 4 - 4 = 8$$

$\langle v,v\rangle = 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0+(-1)\cdot(-1)=1$

$\langle v,e_1\rangle = 0\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 1+(-1)\cdot 1=-1$

$\langle v,a\rangle = 0\cdot 1+0\cdot(-1)+0\cdot 1+(-1)\cdot(-1)=1$

$\langle e_1,v\rangle = \langle v,e_1\rangle = -1$

$\langle e_1,e_1\rangle = 1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1=4$

$\langle e_1,a\rangle = 1\cdot 1+1\cdot(-1)+1\cdot 1+1\cdot(-1)=0$

$\langle a,v\rangle = \langle v,a\rangle = 1$

$\langle a,e_1\rangle = \langle e_1,a\rangle = 0$

$\langle a,a\rangle = 1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)=4$

$$G(e_1,e_2,e_3)=\begin{vmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,e_2\rangle & \langle e_1,e_3\rangle \\ \langle e_2,e_1\rangle & \langle e_2,e_2\rangle & \langle e_2,e_3\rangle \\ \langle e_3,e_1\rangle & \langle e_3,e_2\rangle & \langle e_3,e_3\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

$\langle e_1,e_2\rangle = 1\cdot 1+1\cdot(-1)+1\cdot 0+1\cdot 0=0$

$\langle e_1,e_3\rangle = 1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot(-1)=0$

$\langle e_2,e_1\rangle = \langle e_1,e_2\rangle = 0$

$\langle e_2,e_2\rangle = 1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0+0\cdot 0=2$

$\langle e_2,e_3\rangle = 1\cdot 0+(-1)\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot(-1)=0$

$\langle e_3,e_1\rangle = \langle e_1,e_3\rangle = 0$

$\langle e_3,e_2\rangle = \langle e_2,e_3\rangle = 0$

$\langle e_3,e_3\rangle = 0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)=2$

$$d(\Delta,P)=\sqrt{\frac{G(v,e_1,a)}{G(e_1,e_2,e_3)}}=\sqrt{\frac{8}{16}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

SE10

SE-10

În planul euclidian $\mathbb{R}^2$ să se determine operatorul de simetrie față de dreapta $D_1 : \ 2x - y = 0$, paralelă cu dreapta $D_2 : \ 3x + 2y = 0$ și adjunctul său.

SE11

SE-11

Să se arate că forma pătratică $f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1} x_i x_j$ este pozitiv definită.

Notăm $d = v - v_2 = (1,1,1,1)$.

$$d(A,D) = \sqrt{\frac{G(v-v_2, v_1)}{G(v_1)}} = \sqrt{\frac{G(d, v_1)}{G(v_1)}} = \frac{0}{4} = 0$$

$$G(d,v_1) = \begin{vmatrix} \langle d,d\rangle & \langle d,v_1\rangle \\ \langle v_1,d\rangle & \langle v_1,v_1\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\langle d,d\rangle = 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 = 4$

$\langle d,v_1\rangle = 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 = 4$

$\langle v_1,d\rangle = \langle d,v_1\rangle = 4$

$\langle v_1,v_1\rangle = 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 = 4$

$G(v_1) = |\langle v_1,v_1\rangle| = 4$

SE-3

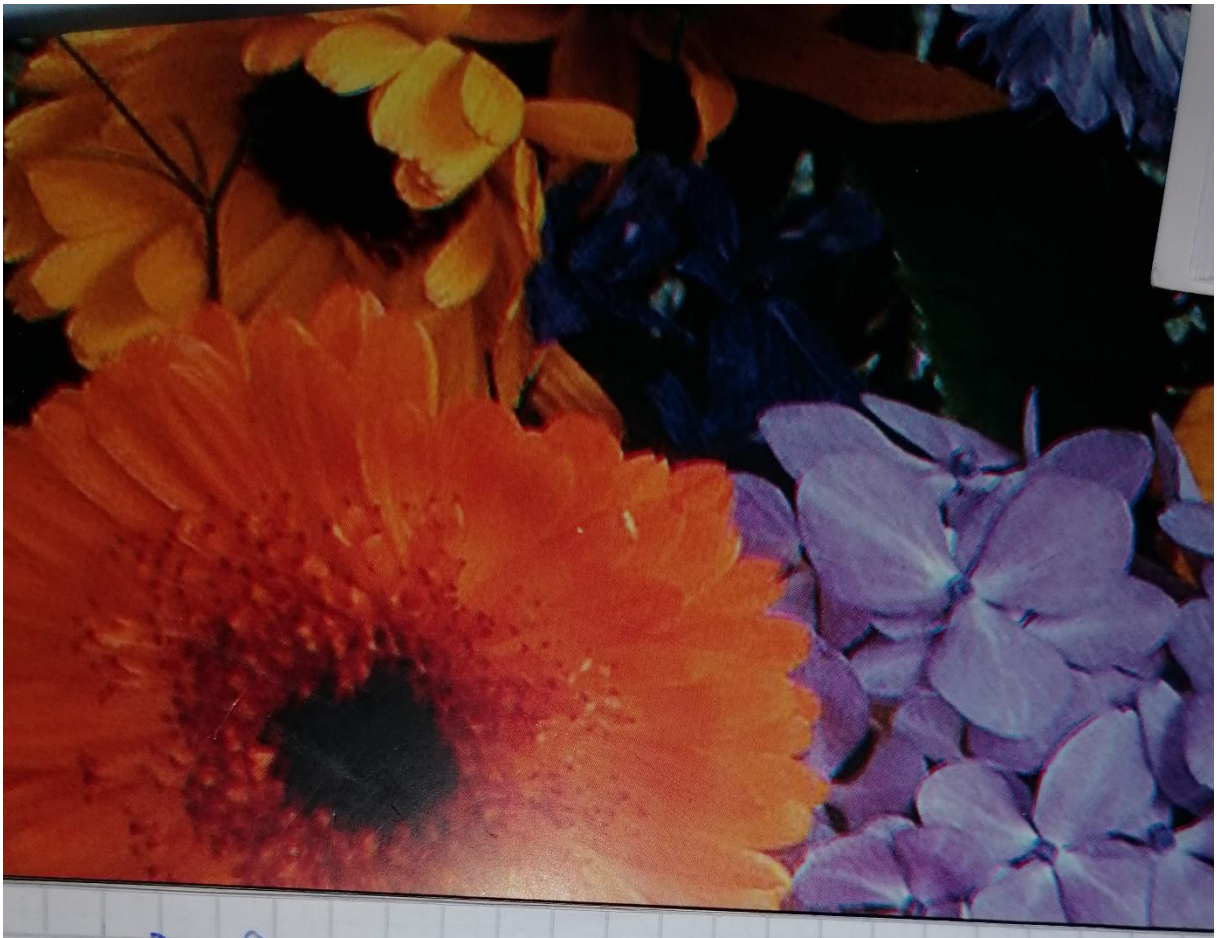
$f = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{1}{i+j-1} x_i x_j$ pozitiv definită

Avem $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 x^{i-1}\cdot x^{j-1}\,dx$

și atunci $f = \sum_{i,j=1}^{m} \left(\int_0^1 x^{i-1}\cdot x^{j-1}\,dx\right) x_i x_j =$

$= \int_0^1 \left(\sum_{i,j=1}^{m} (x^{i-1}\cdot x_i)(x^{j-1}\cdot x_j)\right) dx =$

$= \int_0^1 (x_1 + x\cdot x_2 + x^2\cdot x_3 + \ldots + x^{m-1} x_m)^2\,dx > 0$ pentru orice $(x_1,\ldots,x_m) \neq (0,\ldots,0)$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow f$ pozitiv definită

SE12

SE-12

În spațiul euclidian $\mathbb{R}^4$ să se determine distanța de la punctul $A(1,2,3,4)$ la dreapta

$$D = \{(t, 1+t, 2+t, 3+t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (CA,TI - ro., an 1, seria A) 18 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	CRISAN SEBASTIAN - GABRIEL	1	4	9

SE - 8

În spațiul euclidian $\mathbb{R}^4$ se cere dist. distanța de la punctul $A(1,2,3,4)$ la dreapta $D = \{(t, 1+t, 2+t, 3+t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Soluție:

$D = \{(0,1,2,3) + t(1,1,1,1)\}, t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \vec{v_1} = (0,1,2,3)$

$\vec{v_2} = (1,1,1,1)$

Un punct al dreptei este $A_0 = (0,1,2,3)$ pt $t=0$

$\vec{D} = \text{Span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$

$d(A, \text{Span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}) = \sqrt{\dfrac{G(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{n_A} - \vec{n_0})}{G(\vec{v_1}, \vec{v_2})}}$

Notăm $\vec{n_A} - \vec{n_0} = \vec{v_3}$, $\vec{v_3} = (-1,-1,-1,-1)$

$G(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \langle v_1, v_3\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \langle v_2, v_3\rangle \\ \langle v_3, v_1\rangle & \langle v_3, v_2\rangle & \langle v_3, v_3\rangle \end{vmatrix}$

$\langle v_1, v_1\rangle = 0 + 1 + 2^2 + 3^2 = 14$

$\langle v_1, v_2\rangle = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$

$\langle v_1, v_3\rangle = -1 - 2 - 3 = -6$

$\langle v_2, v_3\rangle = 0 \rightarrow$ vect ortogonali

$\langle v_2, v_2\rangle = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

$\langle v_3, v_3\rangle = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

$G(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) = \begin{vmatrix} 14 & 6 & -6 \\ 6 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 64$

$G(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 20$

$d(A, \text{Span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}) = \sqrt{\dfrac{64}{20}} = \dfrac{8}{2\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

SE13

SE-13

Să se determine valoarea minimă a integralei I_n:

$$I_n(f) = \int_0^1 (f(x))^2 dx,$$

unde f este polinom unitar de gradul n.

SE14

SE-14

Fie V un spațiu euclidian și V_1, V_2 două subspații astfel ca $V = V_1 \oplus V_2$.
În ce condiții operatorul de simetrie față de V_1, paralel cu V_2 este autoadjunct?

SE15

SE-15

În spațiul euclidian $(\mathbb{R}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, unde $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$, să se arate că polinoamele $f_n(x) = [(x^2-1)^n]^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, formează o bază ortogonală. Determinați o bază ortonormată.

SE16

SE-16

În spațiul euclidian $\mathbb{R}^4$ să se determine proiecția ortogonală pe planul

$$P: \ x_1 + x_2 = 0, \ x_3 + x_4 = 0.$$

SE17

SE-17

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulțimi finite și $a_{ij} = |A_i \cap A_j|$. Să se arate că $\det[a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}} \geq 0$.

SE18

SE-18

Fie $A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică cu toate valorile proprii strict pozitive. Să se arate că $a_{ii} \cdot a_{jj} > a_{ij}^2, \forall\, i, j = \overline{1, n}$.

EXAMEN Algebră liniară și geometrie analitică (AU - ro., an 1, seria A) 22 / 01 / 2021	Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
	VISA DANIEL NICOLAE	1	30MB	9

SE. Fie $A=[a_{ij}]_{i,j}$ $i,m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică cu toate valorile proprii strict pozitive. Să se arate că $a_{ii} \cdot a_{jj} > a_{ij}^2$ $\forall i, j = \overline{1,m}$

Sol.

Fie $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ - & - & - & - \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$

Considerăm submatricea principală

$\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix}$ -> care este strict pozitiv definită

-> determinantul ei este strict pozitiv

-> $a_{ii} \cdot a_{jj} > a_{ij}^2$ $\forall i, j = \overline{1,m}$

SE19

SE-19

Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu euclidian și $V_1 \subset V$ un subspațiu de dimensiune finită.
Să se arate că pentru orice vector $x \in V$, $x = x_1 + x_1^{\perp}$ cu $x_1 \in V_1$, $x_1^{\perp} \in V_1^{\perp}$ (x_1 proiecția ortogonală a lui x pe V_1), avem: $x_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i$, unde $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ este o bază ortonormată în V_1 și $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$, $i = \overline{1, n}$.

SE20

SE-20

Fie $I_1, I_2, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ intervale închise și notăm $a_{ij} = \mathcal{L}(I_i \cap I_j)$ (lungimea intersecției). Să se arate că forma pătratică $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ este pozitiv semidefinită.

SE21

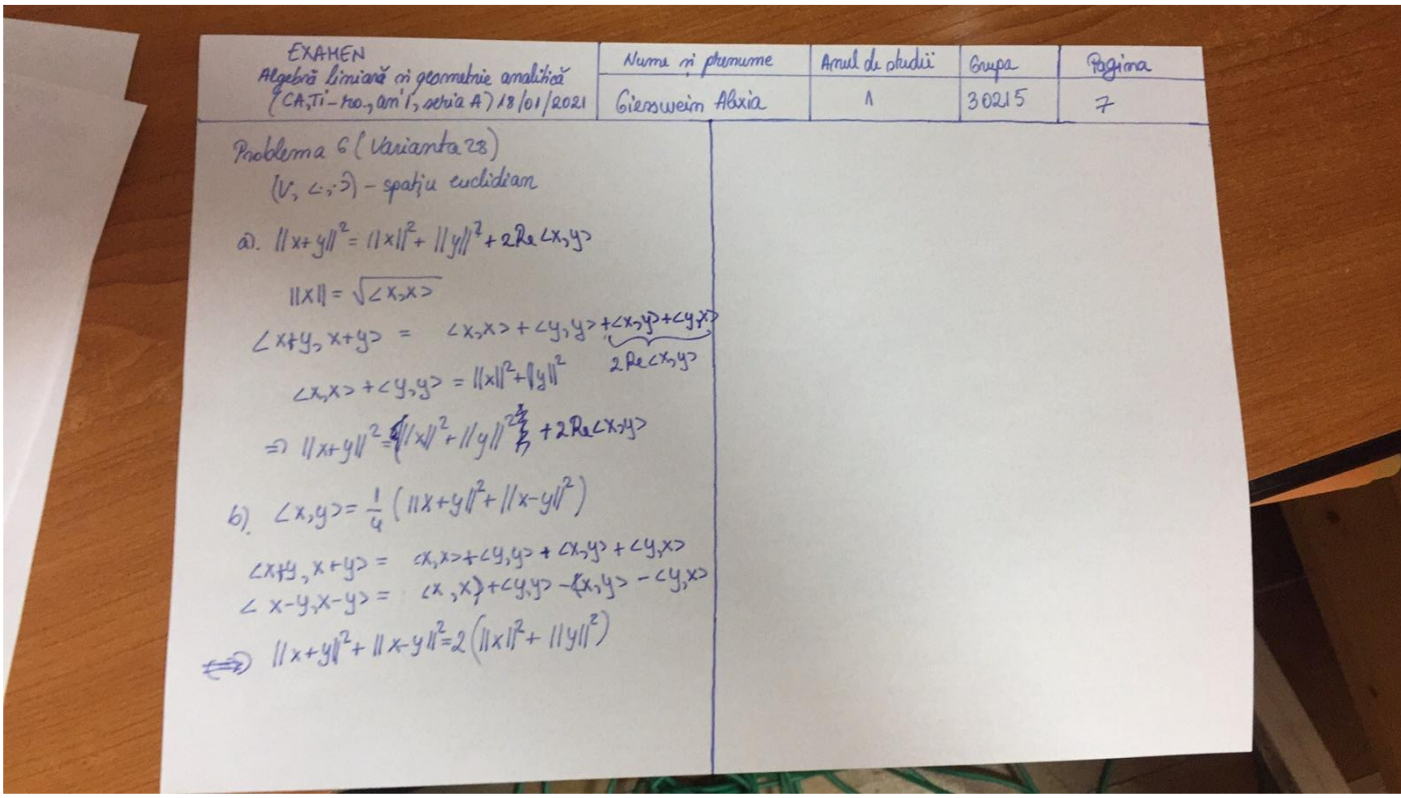
SE-21

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice antisimetrică. Să se arate că $\det A \geq 0$.

SE22

SE-22

Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu euclidian complex. Să se arate că:
a) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y \rangle$.
b) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$.



EXAMEN
Algebră liniară și geometrie analitică
(CA, TI – ro., an I, seria A) 18/01/2021

Nume și prenume	Anul de studii	Grupa	Pagina
Giersweim Alexia	1	30215	7

Problema 6 (Varianta 28)

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – spațiu euclidian

a). $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \underbrace{\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle}_{2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle}$

$\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$\Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle$

b). $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$

$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle$

$\langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle$

$\Rightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

SE23

SE-23

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulțimi finite și notăm $a_{ij} = |A_i \cap A_j|$. Să se arate că forma pătratică $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ este pozitiv semidefinită.

SE24

SE-24

Fie $I_1, I_2, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ intervale închise și definim $a_{ij} = \mathcal{L}(I_i \cap I_j)$ (lungimea intervalului $I_i \cap I_j$). Să se arate că $\det[a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}} \geq 0$.

SE25

SE-25

Fie V un spațiu euclidian și V_1, V_2 două subspații astfel ca $V = V_1 \oplus V_2$.
În ce condiții operatorul de proiecție pe V_1, paralel cu V_2 este autoadjunct?

SE26

SE-26

Să se reducă la formă canonică și să se precizeze signatura formei pătratice

$$f = x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1.$$

SE27

SE-27

Fie $A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică pozitiv definită. Să se arate că funcția $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$, unde $\langle X, Y \rangle_A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$.

SE28

SE-28

În spațiul euclidian $\mathbb{R}^3$ să se determine operatorul de simetrie față de planul

$$(\pi): \ 2x - y + 3z = 0,$$

pe direcția dreptei $D: \ x = y = z$ și adjunctul său.

SE29

SE-29

Pe spațiul vectorial $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ definim $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A \cdot B^*)$.
Să se arate că $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este spațiu euclidian.

SE30

SE-30

Fie X, Y spații euclidiene și $T : X \to Y$ un operator liniar care admite adjunct. Să se arate că operatorul $T \circ T^*$ este autoadjunct, are valori proprii reale și $\mathrm{Im}(T \circ T^*) = \mathrm{Im}T$.

EXAMEN ALGEBRĂ LINIARĂ ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ (CA, TI-RO, an 1, SERIA A) 18/01/2021	NUME ȘI PRENUME	ANUL DE STUDII	GRUPA	PAGINA
	ȘERBAN ALEXANDRA	I	30215	5

25 SE | X, Y 2 spații euclidiene $T: X \to Y$ și $T^*: Y \to X$

$Im(T^* \circ T) = Im(T^*)$

Arătăm mai întâi că $Ker(T \circ T^*) = Ker(T^*)$

$x \in Ker(T \circ T^*) \Leftrightarrow (T \circ T^*)(x) = 0 \Leftrightarrow \langle x, T \circ T^*(x) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle T^*(x), T^*(x) \rangle = 0 \Rightarrow T^*(x) = 0 \Rightarrow x \in Ker\, T^*$

Dacă $x \in Ker\, T^* \Rightarrow T^*(x) = 0 \Rightarrow \langle T^*(x), T^*(x) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle x, T \circ T^*(x) \rangle = 0 \Rightarrow T \circ T^*(x) = 0 \Rightarrow x \in Ker(T \circ T^*)$

Demonstrăm că $Im(T^* \circ T) = Im(T^*)$

$Im(T \circ T^*) = [Ker(T \circ T^*)]^{\perp} = [Ker(T^*)]^{\perp} =$

$= [(Im\, T)^{\perp}]^{\perp} = Im\, T$

$\Rightarrow Im(T^* \circ T) = Im\, T^*$ ADEVĂRAT